ALA-c 2006

RÄKNEÖVNING — VECKA 4

David Heintz, 11 februari 2006

Innehåll

1 Optimering

1.1 Uppgift 1

Hitta maximum och minimum för ytan $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1$ *på enhetsskivan* $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$.

Existensen av ett största resp. minsta värde är garanterad, eftersom Ω är kompakt (dvs. slutet och begränsat) samt f är Lipschitzkontinuerlig.

Maxima och minima kan finnas i eller på:

- (inre) stationära punkter $\bar{\mathbf{x}}$ (sådana där $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$),
- randen (betecknas ofta $\partial\Omega$).

Punkter där f inte är differentierbar, om sådana alls finns, måste därtill undersökas separat.

Stationära punkter

Har partiella derivator

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) = 2\bar{x}_1 - 1 = 0 \implies \bar{x}_1 = \tfrac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}) = 4\bar{x}_2 = 0 \implies \bar{x}_2 = 0,$$

och därmed en inre stationär punkt $\bar{\mathbf{x}} = \left(\tfrac{1}{2}, 0\right)$. Här är $f(\bar{\mathbf{x}}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot 0^2 - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{4}$.

Randen

Randkurvan ges av $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (enhetscirkel). Den har en parametrisering

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

så att restriktionen av f till randen blir

$$\begin{aligned} f|_{\partial\Omega} &= \cos^2(t) + 2\sin^2(t) - \cos(t) = \underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{=1} + \sin^2(t) - \cos(t) \\ &= 1 + \sin^2(t) - \cos(t) = \tilde{f}(t). \end{aligned}$$

Eftersom randen "hänger ihop i ett stycke" (dvs. saknar hörn) behöver vi endast kontrollera för stationära punkter:

$$\tilde{f}'(\bar{t}) = 2\sin(\bar{t})\cos(\bar{t}) + \sin(\bar{t}) = 0 \implies \sin(\bar{t})\big(2\cos(\bar{t}) + 1\big) = 0,$$

ger

$$\sin(\bar{t}) = 0 \implies \begin{cases} \bar{t}_1 = 0, \\ \bar{t}_2 = \pi, \end{cases} \quad 2\cos(\bar{t}) + 1 = 0 \implies \cos(\bar{t}) = \tfrac{-1}{2} \implies \begin{cases} \bar{t}_3 = \tfrac{2\pi}{3}, \\ \bar{t}_4 = \tfrac{4\pi}{3}. \end{cases}$$

Funktionsvärdena i de fyra nya kandidaterna är

$$\begin{aligned} \tilde{f}(0) &= 1 + \sin^2(0) - \cos(0) = 1 + 0^2 - 1 = 0, \\ \tilde{f}(\pi) &= 1 + \sin^2(\pi) - \cos(\pi) = 1 + 0^2 - (-1) = 2, \\ \tilde{f}\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) &= 1 + \sin^2\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) = 1 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{-1}{2}\right) = \tfrac{9}{4}, \\ \tilde{f}\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) &= 1 + \sin^2\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) - \cos\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) = 1 + \left(\tfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{-1}{2}\right) = \tfrac{9}{4}, \end{aligned}$$

och det följer att

$$\begin{aligned} f_{\min} &= \tfrac{-1}{4}, \quad \text{för } \bar{x} = \left(\tfrac{1}{2}, 0\right), \\ f_{\max} &= \tfrac{9}{4}, \quad \text{för } \bar{t}_3 \iff \left(\tfrac{-1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ samt } \bar{t}_4 \iff \left(\tfrac{-1}{2}, \tfrac{-\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

□

1.2 Uppgift 4

Sök maximum och minimum till funktionerna.

a) $f(x_1, x_2) = (1 + x_1^2 + x_2^2)^{-1}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Uppgiften kan lösas utan beräkningar: Eftersom $x_1^2 + x_2^2 \ge 0$ inses att $f_{\max} = 1$ i origo, och minsta värde saknas, ty $\mathbb{R}^2$ är inte någon kompakt mängd (däremot existerar gränsvärdet $f \to 0$, $\|\mathbf{x}\| \to \infty$).

b) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2, \quad x_1^2 + x_2^2 \le 1$ (enhetsskivan)

Stationära punkter

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{x}_2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{x}_1 = 0,$$

dvs. att det finns en inre stationär punkt i origo där $f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

Randen

Randkurvan ges av $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (enhetscirkeln) med en parametrisering

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

så att restriktionen av f till randen är

$$f|_{\partial\Omega} = \cos(t)\sin(t) = \tilde{f}(t).$$

Det räcker återigen att kontrollera för stationära punkter:

$$\tilde{f}'(\bar{t}) = -\sin(\bar{t})\sin(\bar{t}) + \cos(\bar{t})\cos(\bar{t}) = \cos^2(\bar{t}) - \sin^2(\bar{t}) = 0,$$

med $\sin^2(\bar{t}) = \cos^2(\bar{t}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ för

$$\bar{t}_1 = \tfrac{\pi}{4}, \quad \bar{t}_2 = \tfrac{3\pi}{4}, \quad \bar{t}_3 = \tfrac{5\pi}{4}, \quad \bar{t}_4 = \tfrac{7\pi}{4}.$$

Funktionsvärdena i de fyra nya kandidaterna är

$$\tilde{f}\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}, \quad \tilde{f}\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)\sin\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) = \tfrac{-1}{\sqrt{2}}\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{-1}{2},$$
$$\tilde{f}\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)\sin\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) = \tfrac{-1}{\sqrt{2}}\tfrac{-1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}, \quad \tilde{f}\left(\tfrac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(\tfrac{7\pi}{4}\right)\sin\left(\tfrac{7\pi}{4}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{-1}{\sqrt{2}} = \tfrac{-1}{2},$$

och vi får således

$$f_{\min} = \tfrac{-1}{2}, \quad \text{för } \bar{t}_2 \iff \left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ samt } \bar{t}_4 \iff \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{-1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$f_{\max} = \tfrac{1}{2}, \quad \text{för } \bar{t}_1 \iff \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ samt } \bar{t}_3 \iff \left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}}, \tfrac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$

□

1.3 Uppgift 10

Bestäm huruvida de stationära punkterna är maxima eller minima.

a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 - x_2 + x_3 + 1$

Stationära punkter

De partiella derivatorna ges av

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) = 2\bar{x}_1 - 1 = 0 \implies \bar{x}_1 = \tfrac{1}{2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}) = 2\bar{x}_2 - 1 = 0 \implies \bar{x}_2 = \tfrac{1}{2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(\bar{\mathbf{x}}) = 2\bar{x}_3 + 1 = 0 \implies \bar{x}_3 = \tfrac{-1}{2},$$

och vi har en stationär punkt $\bar{\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

Karaktär av stationär punkt

Anmärkning. Karaktären av en stationär punkt $\bar{\mathbf{x}}$ bestäms av Hessianmatrisen $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})$ till f. De tre vanliga fallen som uppstår är:

- $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})$ positivt definit: $\mathbf{v}^T\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{v} > 0, \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ (motsvaras av att $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})$ har strikt positiva egenvärden). I så fall har f *lokalt minimum* i $\bar{\mathbf{x}}$,
- $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})$ negativt definit: $\mathbf{v}^T\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{v} < 0, \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ (motsvaras av att $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})$ har strikt negativa egenvärden). Här har f *lokalt maximum* i $\bar{\mathbf{x}}$,

- $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})$ indefinit (motsvaras av såväl positiva som negativa egenvärden). Om $\mathbf{H}$ dessutom är kontinuerlig, samt $\det(\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})) \neq 0$, har f *sadelpunkt* i $\bar{\mathbf{x}}$.

Ovanstående kan motiveras av andra ordningens Taylorutveckling av f kring $\bar{\mathbf{x}}$:

$$P_2(\mathbf{x}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + (\nabla f(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}),$$

ty med $\bar{\mathbf{x}}$ som stationär punkt är $(\nabla f(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = 0$ och P_2 ökar eller minskar beroende på den kvadratiska termen när vi rör oss från $\bar{\mathbf{x}}$. ■

Med $\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 1 & 2x_2 - 1 & 2x_3 + 1 \end{pmatrix}$ blir Hessianmatrisen

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{I} = \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}),$$

som vi nu behöver lösa egenvärdesproblemet för. Men med $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})$ diagonal står egenvärdena i huvuddiagonalen — alltså är $\lambda_{1,2,3} = 2 > 0$, så $\bar{\mathbf{x}}$ måste vara lokalt minimum till f.

c) $f(x_1, x_2, x_3) = \cos(x_1) + \cos(x_2) + \cos(x_3)$

Stationära punkter

De partiella derivatorna ges av

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) = -\sin(\bar{x}_1) = 0 \implies \begin{cases} \bar{x}_{1,1} = 0, \\ \bar{x}_{1,2} = \pi, \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}) = -\sin(\bar{x}_2) = 0 \implies \begin{cases} \bar{x}_{2,1} = 0, \\ \bar{x}_{2,2} = \pi, \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(\bar{\mathbf{x}}) = -\sin(\bar{x}_3) = 0 \implies \begin{cases} \bar{x}_{3,1} = 0, \\ \bar{x}_{3,2} = \pi, \end{cases}$$

så att vi får åtta stationära punkter (bortsett från periodiska upprepningar):

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = (0,0,0), \quad \bar{\mathbf{x}}_2 = (0,0,\pi), \quad \bar{\mathbf{x}}_3 = (0,\pi,0), \quad \bar{\mathbf{x}}_4 = (0,\pi,\pi),$$
$$\bar{\mathbf{x}}_5 = (\pi,0,0), \quad \bar{\mathbf{x}}_6 = (\pi,0,\pi), \quad \bar{\mathbf{x}}_7 = (\pi,\pi,0), \quad \bar{\mathbf{x}}_8 = (\pi,\pi,\pi).$$

Karaktär av stationära punkter

Med $\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\sin(x_1) & -\sin(x_2) & -\sin(x_3) \end{pmatrix}$ blir Hessianmatrisen

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\cos(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(x_3) \end{pmatrix}.$$

De åtta Hessianmatriserna blir m.a.o. diagonala, kontinuerliga samt icke-singulära (determinanterna är nollskilda), med (diagonalelement) = (egenvärde) = ± 1 för samtliga stationära punkter.

För $\bar{\mathbf{x}}_1$ är $\mathbf{H} = -\mathbf{I}$ så att $\lambda_{1,2,3} = -1$ och f har lokalt maximum, för $\bar{\mathbf{x}}_2$ är istället $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ så att $\lambda_{1,2,3} = 1$ och f har lokalt minimum. För övriga stationära punkter gäller att egenvärdena är blandade (båda positiva och negativa). Alltså har vi i dessa sex sadelpunkter. □

2 Divergens, rotation och Laplacian

2.1 Uppgift 1

Låt $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - 3x_1x_2 + x_3^2 & \sin(x_1)\cos(x_1) + x_1 & \sin(x_1)\mathrm{e}^{x_1x_2} \end{pmatrix}$ *med* $\bar{\mathbf{x}} = (1, 2, 3)$. *Beräkna uttrycken.*

a) $\nabla \cdot \mathbf{F} = \operatorname{div}(\mathbf{F})$

Nablaoperatorn $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ kan räknas med som en vanlig vektor:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \\ &= (5 - 3x_2) + 0 + 0 = 5 - 3x_2, \\ \nabla \cdot \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) &= 5 - 3 \cdot 2 = -1. \end{aligned}$$

□

2.2 Uppgift 2

Visa att $(\nabla \times \nabla)u = \mathbf{o}$ *för en godtycklig skalär funktion* u. *Jämför med* $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$.

Vektor- eller kryssprodukten $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ger en vektor som bl.a. har egenskaperna:

- $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \sin(\theta)$,
- $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ortogonal mot både $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$.

Det medför att $\nabla \times \nabla = \mathbf{o}$ (parallella vektorer med $\theta = 0$). Därför är det troligt att även $(\nabla \times \nabla)u = \mathbf{o}$. Vi kontrollerar genom beräkning i t.ex. $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 0 - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot 0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 0 = \mathbf{o}, \end{aligned}$$

med utveckling efter rad 1 (underdeterminanterna blir 0 eftersom raderna är lika). Det använda räkneschemat är ett bra stöd för minnet där man slipper komma ihåg långa formler.

Vi har nu motiverat påståendet i $\mathbb{R}^3$. Att sedan $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \mathbf{o}$ är inte troligt — vektorerna ∇ och $\nabla \times \mathbf{u}$ är ju ortogonala. □

2.3 Uppgift 3

Visa sambanden för lämpliga funktioner u, v.

a) $\nabla(uv) = (\nabla u)v + u(\nabla v)$

Låt $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ett godtyckligt element i gradienten blir (använd produktregeln)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i}v + u\frac{\partial v}{\partial x_i},$$

och det följer att

$$\begin{aligned}
\nabla(uv) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}v + u\frac{\partial v}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n}v + u\frac{\partial v}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}v & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n}v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u\frac{\partial v}{\partial x_1} & \cdots & u\frac{\partial v}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix} v + u \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\
&= (\nabla u)v + u(\nabla v),
\end{aligned}$$

eftersom vektorer adderas elementvis och multiplikation med skalär gäller samtliga element.

d) $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (AMBS berör inte högre dimension än $\mathbb{R}^3$). Direkta beräkningar ger först kryssprodukterna

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 & u_3v_1 - u_1v_3 & u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}, \\
\nabla \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \\
\nabla \times \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

och sedan VL

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \frac{\partial}{\partial x_1}(u_2v_3 - u_3v_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(u_3v_1 - u_1v_3) + \frac{\partial}{\partial x_3}(u_1v_2 - u_2v_1) \\
&= \frac{\partial u_2}{\partial x_1}v_3 + u_2\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}v_2 - u_3\frac{\partial v_2}{\partial x_1} \\
&\quad + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}v_1 + u_3\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}v_3 - u_1\frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\
&\quad + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}v_2 + u_1\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}v_1 - u_2\frac{\partial v_1}{\partial x_3},
\end{aligned}$$

vilket — efter omkastning/samling av termer — identifieras som

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \underbrace{v_1\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + v_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + v_3\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)}_{=\mathbf{v}\cdot(\nabla\times\mathbf{u})} \\
&\quad \underbrace{- u_1\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) - u_2\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) - u_3\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)}_{=-\mathbf{u}\cdot(\nabla\times\mathbf{v})} \\
&= \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}),
\end{aligned}$$

vilket visar påståendet i $\mathbb{R}^3$. $\square$

2.4 Uppgift 10

Visa att $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u(\mathbf{x}) = c_1\|\mathbf{x}\|^{-1} + c_2$, med c_1, c_2 konstanter, är en lösning till Laplace ekvation $\Delta u(\mathbf{x}) = 0$ för $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$.

Notera att u inte definierad för $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ som därför måste utelämnas. Laplaceoperatorn Δ i rummet är

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Påståendet visas annars genom insättning:

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)(c_1\|\mathbf{x}\|^{-1} + c_2) = c_1\left(\frac{\partial^2\|\mathbf{x}\|^{-1}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\|\mathbf{x}\|^{-1}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\|\mathbf{x}\|^{-1}}{\partial x_3^2}\right),$$

där den första termen i HL blir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\|\mathbf{x}\|^{-1}}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{-1/2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\tfrac{-1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{-3/2} 2x_1\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{-3/2}\right) \quad \{\text{produktregeln}\} \\
&= -\left(\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{-3/2} + x_1\left(\tfrac{-3}{2}\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{-5/2} 2x_1\right) \\
&= \frac{3x_1^2}{\|\mathbf{x}\|^5} - \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3}\left(\frac{3x_1^2}{\|\mathbf{x}\|^2} - 1\right),
\end{aligned}$$

och med samma beräkningar följer de båda andra

$$\frac{\partial^2\|\mathbf{x}\|^{-1}}{\partial x_2^2} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3}\left(\frac{3x_2^2}{\|\mathbf{x}\|^2} - 1\right), \quad \frac{\partial^2\|\mathbf{x}\|^{-1}}{\partial x_3^2} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3}\left(\frac{3x_3^2}{\|\mathbf{x}\|^2} - 1\right).$$

Återstår endast att summera:

$$\Delta u = c_1\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3}\left(\frac{3\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)}{\|\mathbf{x}\|^2} - 3\right) = c_1\frac{1}{\|x\|^3}(3 - 3) = 0,$$

eftersom $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|\mathbf{x}\|^2$. Alltså har vi visat att u löser Laplace ekvation. $\square$

3 Kurvintegraler

3.1 Uppgift 1

Bestäm kurvans längd.

c) $\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) & 1 - \cos(t) \end{pmatrix}^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Längden av en kurva Γ ges av

$$L(\Gamma) = \int_\Gamma \mathrm{d}s = \int_a^b \|\mathbf{s}'(t)\| \,\mathrm{d}t,$$

där $\mathrm{d}s$ är längden av ett kurvelement (ett s.k. *bågelement*), medan $\mathbf{s}(t)$ är en parametrisering av kurvan på intervallet $a \leq t \leq b$. Här fås

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}'(t) &= \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \\
\|\mathbf{s}'(t)\| &= \left((1-\cos(t))^2 + \sin^2(t)\right)^{1/2} = \Big(1 - 2\cos(t) + \underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{=1}\Big)^{1/2} \\
&= \left(2 - 2\cos(t)\right)^{1/2} = \left\{\cos(t) = 1 - 2\sin^2\left(\tfrac{t}{2}\right)\right\} = \left(4\sin^2\left(\tfrac{t}{2}\right)\right)^{1/2} = 2\left|\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\right|,
\end{aligned}$$

med absolutbelopp av sinus (kommer sig av att längden är positiv). Kurvans längd blir således

$$\int_0^{2\pi} 2\left|\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\right| \,\mathrm{d}t = 2\int_0^{2\pi} \sin\left(\tfrac{t}{2}\right) \mathrm{d}t = 2\left[-2\cos\left(\tfrac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = -4(-1-1) = 8.$$

□