ALA-a 2005

RÄKNEÖVNING — VECKA 4

David Heintz, 25 september 2005

Innehåll

1 Analytisk geometri i $\mathbb{R}^2$

1.1 Uppgift 20.3

Given the vectors $\mathbf{a} = (3, 2)$ *and* $\mathbf{b} = (1, 4)$ *perform the following computations.*

c) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$

Normen ("längden") av en vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ definieras som

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

i [AMBS, ekv. 20.4]. Man får därför

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |(3, 2) + (1, 4)| = |(4, 6)| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13},$$

efter komponentvis addition av $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. □

e) $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$

Normen för $\mathbf{a}$ är $|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, dvs. att

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3, 2),$$

och man säger att $\mathbf{a}$ har blivit *normerad*. Den resulterande vektorn har samma riktning som $\mathbf{a}$ samt längden 1. □

1.2 Uppgift 20.5

Given $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ *prove the following inequalities.*

a) $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$

Relationen är välkänd och brukar kallas *Cauchy-Schwarz olikhet*. Om vi kommer ihåg sambandet $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\theta)$ från [AMBS, ekv 20.8] följer påståendet direkt (eftersom $|\cos(\theta)| \le 1$). Utan att "fuska" kan vi exempelvis anta att $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ (om $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ är ju olikheten trivial), och för ett godtyckligt reellt tal c fås då

$$0 \le |\mathbf{a} - c\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - c\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - c\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 2c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + c^2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}).$$

Väljs särskilt $c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ leder det till

$$0 \le \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \frac{2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \implies (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \le (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}),$$

dvs. att

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \le |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2,$$

vilket är den sökta olikheten (följer direkt som kvadratroten ur höger- resp. vänsterled). □

b) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

Triangelolikheten för vektorer kan härledas m.h.a. Cauchy-Schwarz olikhet (C-S):

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} \overset{\text{C-S}}{\le} |\mathbf{a} + \mathbf{b}||\mathbf{a}| + |\mathbf{a} + \mathbf{b}||\mathbf{b}| \\ &= |\mathbf{a} + \mathbf{b}|(|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|), \end{aligned}$$

varpå division med $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ ger oss påståendet. □

1.3 Uppgift 20.7

Given $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ *determine which of the statements that make sense.*

d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}$

Eftersom skalärprodukten $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ är ett tal, och $\mathbf{c}$ är en vektor med två komponenter, är inte additionen definierad.

Anmärkning. I MATLAB hade däremot räkneoperationen varit tillåten — i förekommande fall översätts talet $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ till vektorn $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. Måhända praktiskt, men samtidig vilseledande. □

1.4 Uppgift 20.10

Find the projection of $\mathbf{b} = (2, 2)$ *onto* $\mathbf{a}$.

c) $\mathbf{a} = (1, 2)$

Vi härleder ett uttryck för den sökta projektionen. Enligt Figur 1 gäller att

$$\mathbf{P_a}(\mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a}, \tag{1}$$

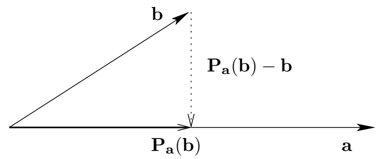
$$(\mathbf{P_a}(\mathbf{b}) - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0, \tag{2}$$

eftersom den projicerade vektorn $\mathbf{P_a}(\mathbf{b})$ måste vara parallell med $\mathbf{a}$, samt att $\mathbf{P_a}(\mathbf{b}) - \mathbf{b}$ och $\mathbf{a}$ är ortogonala. Men då har man från (2) att $\mathbf{P_a}(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, och vidare genom (1) att $\lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Alltså blir

$$\lambda = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2},$$

och efter insättning i (1) fås

$$\mathbf{P_a}(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a}. \tag{3}$$



Figur 1: Den ortogonala projektionen $\mathbf{P_a}(\mathbf{b})$ av $\mathbf{b}$ på $\mathbf{a}$.

Tillämpning av (3) ger

$$\mathbf{P_a}(\mathbf{b}) = \frac{(1,2)\cdot(2,2)}{|(1,2)|^2}(1,2) = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 2}{\left(\sqrt{1^2+2^2}\right)^2} = \frac{6}{5}(1,2),$$

med $\mathbf{P_a}(\mathbf{b})$ i samma riktning som $\mathbf{a}$ fast något längre.

Anmärkning. Den ortogonala projektionen av $\mathbf{b}$ på $\mathbf{a}$ är den bästa representationen av $\mathbf{b}$ i $\mathbf{a}$:s riktning. Jämför med komponentuppdelning av vektorer där $\mathbf{a}$ får vara den ena koordinataxeln. □

1.5 Uppgift 20.14

Given the 2×2 *matrix* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *compute* $\mathbf{Ax}$ *and* $\mathbf{A}^T\mathbf{x}$ *for the following choice of* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

b) $\mathbf{x}^T = (1,1)$

Vi inför beteckningen a_{ij} för matriselementet i rad i samt kolonn j, så att exempelvis $a_{12} = 2$ och $a_{21} = 3$. En matris med m rader och n kolonner sägs vara av typen $m \times n$. Matris-vektor-multiplikationen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ av typ $(m\times n)\times(n\times 1)$ ger tillbaka en vektor av typen $m \times 1$, där b_i motsvaras av skalärprodukten mellan $\mathbf{A}$:s i:te rad och $\mathbf{x}$, eller utskrivet

$$b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i(n-1)}x_{n-1} + a_{in}x_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k.$$

Vi får därför

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Vid *transponering* av $\mathbf{A}$ (betecknas $\mathbf{A}^T$) byter man plats på rader och kolonner i matrisen så att $a_{ij}^T = a_{ji}$. Här blir

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

och multiplikationen

$$\mathbf{A}^T\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 3\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

□

1.6 Uppgift 20.15

Given the 2×2 *matrices* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ *compute the following.*

d) $\mathbf{AB}^T$

Matris-matris-multiplikationen $\mathbf{C} = \mathbf{AB}^T$ av typ $(m\times n)\times(n\times p)$ — notera att antalet kolonner i vänster– och antalet rader i högermatrisen måste vara lika — ger tillbaka en matris av typen $m \times p$. Matriselementet c_{ij} blir

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{i(n-1)}b_{(n-1)j} + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

motsvarande skalärprodukten mellan $\mathbf{A}$:s i:te rad och $\mathbf{B}$:s j:te kolonn. Vi räknar

$$\mathbf{AB}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 & 1\cdot 7 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 6 & 3\cdot 7 + 4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 53 \end{pmatrix}.$$

□

g) $\mathbf{A}^{-1}$

För $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ med element a_{ij}, där $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, definieras *inversen* $\mathbf{A}^{-1}$ som

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

enligt [AMBS, ekv. 20.45]. Insättning i (4) ger

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 4 - 2\cdot 3}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vidare beräkning ger $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$, där $\mathbf{I}$ är den s.k *enhetsmatrisen*

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

med nollelement överallt utom ettor i huvuddiagonalen.

Anmärkning. Det finns allmänna sätt att bestämma inversen av kvadratiska $n\times n$-matriser för $n > 2$. Mer om det senare. □

1.7 Uppgift 20.19

Compute the mirror image of a point with respect to a straight line in $\mathbb{R}^2$ *which does not pass through the origin. Express the mapping in matrix form.*

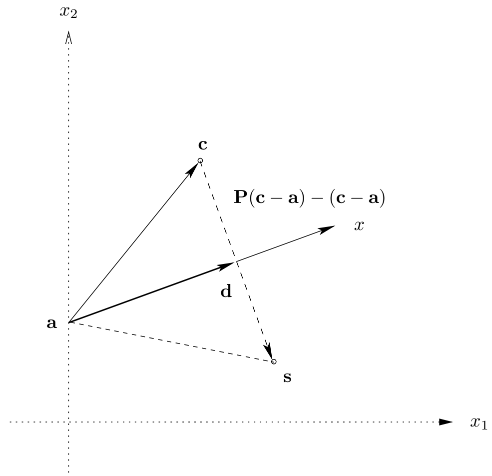
Beteckna med $\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$ tre givna punkter i talplanet, samt med $\mathbf{P}(\cdot)$ den operator som ortogonalt projicerar en vektor på linjen x (vilken inte passerar origo). Från Figur 2 resonerar vi oss fram till att spegelbilden $\mathbf{s}$ av $\mathbf{c}$ blir

$$\mathbf{s} = \mathbf{c} + 2\left[\mathbf{P}(\mathbf{c}-\mathbf{a}) - (\mathbf{c}-\mathbf{a})\right] \overset{\star}{=} (2\mathbf{P}-\mathbf{I})\mathbf{c} + 2(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{a}, \tag{5}$$

eftersom det, i två steg, först tar oss från origo till $\mathbf{c}$, och sedan vidare till $\mathbf{s}$ (via $\mathbf{d} = \mathbf{P}(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ "halvvägs" — notera faktorn 2 framför $\mathbf{P}(\mathbf{c}-\mathbf{a}) - (\mathbf{c}-\mathbf{a})$). I $(\star)$ utnyttjar vi att projektionen är linjär i det att

$$\mathbf{P}(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = \mathbf{P}\mathbf{c} - \mathbf{P}\mathbf{a},$$

vilket är lätt att kontrollera. (Ledtråd: Är skalärprodukten linjär i samma mening?) Den sökta matrisformen är densamma som (5).



Figur 2: En formel för spegling av $\mathbf{c}$ i x kan härledas geometriskt.

Anmärkning. Notera att en vektor inte är bunden till någon speciell punkt — den bestäms uteslutande av storlek och riktning. Därför kan skillnadsvektorn $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ geometriskt beskrivas som den vektor $\mathbf{v}$ som sammanbinder spetsen av $\mathbf{v}_1$ med spetsen av $\mathbf{v}_2$ (i denna ordning). Med exempelvis $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = (3,1) - (1,1) = (2,0)$ får man alltså veta storlek och riktning av $\mathbf{v}$, men ingenting säger att $\mathbf{v}$ utgår från origo ($\mathbf{v}$ kan ritas utgående från vilken punkt som helst). □

1.8 Uppgift 20.22

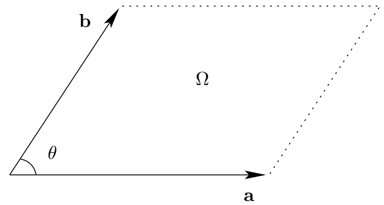
Compute $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *and* $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

b) $\mathbf{a} = (1,2)$, $\mathbf{b} = (3,6)$

Vektor- eller kryssprodukten mellan två vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ ges från [AMBS, ekv. 20.18]

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{6}$$

Geometriskt kan absolutbeloppet $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ tolkas som arean av parallellogrammet vars sidor representeras av $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ (se Figur 3).



Figur 3: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = A(\Omega)$.

Men i uppgiften har vi att $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, varför det är troligt att $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$? (Två parallella vektorer spänner inte upp någon area.) Låt oss med insättning i (6) kontrollera

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0, \quad \mathbf{b} \times \mathbf{a} = 3 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 0,$$

och vi fick rätt!

Anmärkning. Vanligtvis gäller inte att $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$, utan faktiskt att $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, och man brukar säga att vektorprodukten är *antisymmetrisk*. □