ALA-a 2005

RÄKNEÖVNING — VECKA 5

David Heintz, 25 september 2005

Innehåll

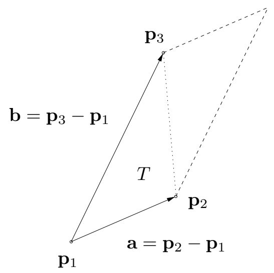
1 Analytisk geometri i $\mathbb{R}^3$

1.1 Uppgift 21.6

What is the area of the triangle formed by the three points $\mathbf{p}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{p}_2 = (2, 3, -1)$ *and* $\mathbf{p}_3 = (0, 5, 1)$*?*

Vi har att $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ och $\mathbf{p}_3$ ligger i ett plan i rummet, där de tillsammans markerar hörnen i en triangel T, med två sidor som, enligt Figur 1 (notera att densamma inte är skalad relativt de givna punkterna), kan representeras av vektorerna

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (1, 2, -1), \quad \mathbf{b} = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 = (-1, 4, 1).$$



Figur 1: Arean av T motsvarar halva parallellogramytan.

Vi känner från [Räkneövning – vecka 4, uppg. 20.22] en formel för arean av det parallellogram som spänns upp av $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. Men ytan av T måste vara hälften så stor! Vektorprodukten $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ för $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ definieras som

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1), \tag{1}$$

i [AMBS, ekv. 21.7] så att

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \big(2 \cdot 1 - (-1)4, (-1)(-1) - 1 \cdot 1, 1 \cdot 4 - 2(-1)\big) = (6, 0, 6), \\ |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| &= \sqrt{6^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}, \end{aligned}$$

och därmed

$$A(T) = \tfrac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 3\sqrt{2}.$$

□

1.2 Uppgift 21.7

Given $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ *and* $\mathbf{b} = (1, 3, 1)$ *compute: 1) the angle* θ *between* $\mathbf{a}$ *and* $\mathbf{b}$*; 2) the projection of* $\mathbf{b}$ *onto* $\mathbf{a}$*; 3) a unit vector orthogonal to both* $\mathbf{a}$ *and* $\mathbf{b}$*.*

Vi har från [AMBS, ekv. 21.6] att

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\theta), \tag{2}$$

och med

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1 \cdot 1, 1 \cdot 3, 1 \cdot 1) = 5, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11},$$

fås därför

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{33}}\right).$$

Projektionen $\mathbf{P}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ av $\mathbf{b}$ på $\mathbf{a}$ följer i $\mathbb{R}^3$ av [AMBS, ekv. 21.4] som

$$\mathbf{P}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} = \frac{5}{3}(1, 1, 1).$$

Återstår att hitta en ortogonal (vinkelrät) *enhetsvektor* $\mathbf{n}$ till $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ med $|\mathbf{n}| = 1$. En sådan ges av den normerade vektorprodukten $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (notera att vektorprodukter resulterar i vektorer — jfr. med skalärprodukter som resulterar i tal). Alltså ska vi beräkna

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \big(1 \cdot 1 - 1 \cdot 3, 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1\big) = (-2, 0, 2), \\ |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| &= \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \end{aligned}$$

och får slutligen

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}(-2, 0, 2) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1).$$

Kontrollera ortogonaliteten genom att beräkna skalärprodukterna $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$ och $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}$, eller lättare, genom $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$ samt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}$. Vad borde svaret bli? (Ledtråd: Utnyttja (2) på lämpligt sätt.)

Anmärkning. Räkneoperationen $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ för $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ kallas *skalär trippelprodukt*, och har även den en geometrisk tolkning, i det att $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ anger volymen av den parallellepiped som bestäms av vektorerna. □

2 Komplexa tal

2.1 Uppgift 22.2

Find the following.

c) Im $\frac{z}{\bar{z}}$

Vi betecknar med $z = a + bi$ ett komplex tal — betecknas $z \in \mathbb{C}$ — med realdel Re $z = a$ och imaginärdel Im $z = b$ på s.k *rektangulär form*. Komplexkonjugatet $\bar{z}$ definieras som $\bar{z} = a - bi$ [AMBS, sid. 349], och vi minns att $i^2 = -1$ [AMBS, ekv. 22.5]. Nu fås

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a+bi}{a-bi} = \frac{(a+bi)^2}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a^2+2abi-b^2}{a^2+b^2},$$

och det måste vara att

$$\mathrm{Im}\frac{z}{\bar{z}} = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

□

2.2 Uppgift 22.3

Let $z_1 = 4 - 5i$ and $z_2 = 2 + 3i$. Find the following on the form $z = a + bi$.

c) $\frac{z_1}{z_1+z_2}$

Direkt beräkning ger

$$z = \frac{z_1}{z_1+z_2} = \frac{4-5i}{(4-5i)+(2+3i)} = \frac{4-5i}{6-2i} = \frac{(6+2i)(4-5i)}{(6+2i)(6-2i)} = \frac{34-22i}{40},$$

som är på den efterfrågade rektangulära formen. □

2.3 Uppgift 22.5

Represent the complex number on polar form.

c) $\frac{2+3i}{5+4i}$

Ett komplex tal $z = a + bi$ kan skrivas på *polär form* som

$$z = (a, b) = r(\cos(\theta), \sin(\theta)) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)), \tag{3}$$

där z framställs som en vektor i det komplexa talplanet (med längden $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ och argumentet $\theta = \arctan(b/a)$ — se [AMBS, fig. 22.2]). Man kan också uttrycka z i termer av den komplexa exponentialfunktionen $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ där det ges att

$$z = r\mathrm{e}^{i\theta}, \tag{4}$$

från vilket det inses att divisionen

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{i(\theta_1-\theta_2)},$$

motsvaras av att det nya komplexa talet har längden $\frac{r_1}{r_2}$ och argumentet $\theta_1 - \theta_2$. Låt oss därför bestämma dessa i tur och ordning för $z_1 = 2 + 3i$ och $z_2 = 5 + 4i$:

$$r_1 = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}, \quad \arg(z_1) = \arctan\left(\tfrac{3}{2}\right),$$
$$r_2 = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41}, \quad \arg(z_2) = \arctan\left(\tfrac{4}{5}\right),$$

och så blir

$$z = \sqrt{\tfrac{13}{41}}(\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad \theta = \arctan\left(\tfrac{3}{2}\right) - \arctan\left(\tfrac{4}{5}\right).$$

□

2.4 Uppgift 22.6

Solve the equations.

c) $z^2 + z + 1 = -i$

Vi börjar lösningen med kvadratkompletteringen

$$z^2 + z + 1 = -i \implies \left(z + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} + 1 = -i \implies \left(z + \tfrac{1}{2}\right)^2 = -\tfrac{3}{4} - i,$$

och fortsätter genom att låta

$$z + \tfrac{1}{2} = a + bi.$$

Det följer efter insättning att

$$(a+bi)^2 = -\tfrac{3}{4} - i \implies a^2 + 2abi - b^2 = -\tfrac{3}{4} - i,$$

där vi identifierar real- och imaginärdelar som

$$a^2 - b^2 = -\tfrac{3}{4}, \tag{5}$$
$$2ab = -1. \tag{6}$$

Samtidigt måste det gälla att

$$\left|(a+bi)^2\right| = \left|-\tfrac{3}{4} - i\right|,$$

dvs.

$$a^2 + b^2 = \sqrt{\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + 1^2} = \tfrac{5}{4}. \tag{7}$$

Kombineras (5) och (7), t.ex. via additionen (5)+(7), fås

$$2a^2 = \tfrac{1}{2} \implies a = \pm\tfrac{1}{2},$$

och när $a = \frac{1}{2}$ måste $b = -1$ för att satisfiera (6). På samma sätt blir $b = 1$ för $a = -\frac{1}{2}$. Med två alternativ skriver vi

$$z + \tfrac{1}{2} = a + bi \implies \begin{cases} z_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - i \implies z_1 = -i, \\ z_2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + i \implies z_2 = i - 1, \end{cases}$$

och är klara. □

2.5 Uppgift 22.9

Describe in geometrical terms the mappings $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

c) $f(z) = z^{1/2}$

Vi utnyttjar (4) till att skriva

$$z = r\mathrm{e}^{i\theta} \implies z^{1/2} = \left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)^{1/2} = r^{1/2}\mathrm{e}^{i\theta/2}, \tag{8}$$

och noterar att f med tiden (givet z_0 är $z_i = f(z_{i-1})$ för $i = 1, 2, \ldots$) får ett komplext tal att närma sig 1.

Anmärkning. Vi kan visa att $r \to 1$ som gränsvärdet av följden $\left\{r^{1/2n}\right\}$. Här fås

$$\left|r^{1/2n} - 1\right| \leq \epsilon \implies N \geq \frac{\log(r)}{2\log(\epsilon + 1)},$$

där olikheten gäller för alla $n \geq N$. Med $r = 2$ och $\epsilon = 0.01$ måste t.ex. $n \geq 35$. (Notera att andra gränsvärden än 1 leder till en orimlig olikhet!)

För $\theta \to 0$ tittar vi i stället på gränsvärdet av följden $\{\theta/2n\}$. Det ger oss

$$\left|\frac{\theta}{2N} - 0\right| \leq \epsilon \implies N \geq \frac{\theta}{2\epsilon}.$$

Hursomhelst, frågan besvarades redan i (8), där det nya komplexa talet $f(z)$ får längden som kvadratroten av föregångarens, samt argumentet halverat. □