ALA-a 2005

RÄKNEÖVNING — VECKA 6

David Heintz, 11 oktober 2005

Innehåll

1 Derivatan

1.1 Uppgift 23.1

Prove directly from the definition that the derivative of x^4 is $4x^3$.

I [AMBS, avs. 23.4] sägs att en funktion $f = f(x)$ är *deriverbar* på ett intervall I, om f är deriverbar för alla punkter $\overline{x} \in I$, så att det för x nära $\overline{x}$ gäller att

$$f(x) = f(\overline{x}) + m(\overline{x})(x - \overline{x}) + E_f(x, \overline{x}), \tag{1}$$

där $|E_f(x, \overline{x})| \leq K_f(\overline{x})(x - \overline{x})^2$. I så fall är derivatan $f'(\overline{x}) = m(\overline{x})$. Vi känner igen tangenten

$$\tilde{f}_{\overline{x}}(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}),$$

som linjäriseringen av f i punkten $\overline{x}$. Alltså säger (1) att felet $E_f(x, \overline{x}) = f(x) - \tilde{f}_{\overline{x}}(x)$ — avvikelsen mellan funktionsgrafen och tangenten — ska vara kvadratiskt litet i $x - \overline{x}$. Särskilt är den linjära approximationen god för x nära $\overline{x}$ (däremot behöver den inte vara det på längre avstånd).

Vill skriva den givna funktionen på formen (1). Försöker med

$$f(x) = x^4 = (\overline{x} + (x - \overline{x}))^4 = \overline{x}^4 + 4\overline{x}^3(x - \overline{x}) + 6\overline{x}^2(x - \overline{x})^2 + 4\overline{x}(x - \overline{x})^3 + (x - \overline{x})^4,$$

genom tillämpning av *Binomialsatsen* (minns ”Pascals triangel” för utveckling av $(a + b)^n$). Kan i HL identifiera $f(\overline{x}) = \overline{x}^4$ samt $m(\overline{x}) = 4\overline{x}^3$, och samlar resterande termer

$$\begin{aligned} E_f(x, \overline{x}) &= 6\overline{x}^2(x - \overline{x})^2 + 4\overline{x}(x - \overline{x})^3 + (x - \overline{x})^4 \\ &= \left(6\overline{x}^2 + 4\overline{x}(x - \overline{x}) + (x - \overline{x})^2\right)(x - \overline{x})^2. \end{aligned}$$

Alla innehåller åtminstone två faktorer $(x - \overline{x})$, varför storleken av felet är kvadratiskt litet

$$|E_f(x, \overline{x})| \leq K_f(\overline{x})(x - \overline{x})^2,$$

eftersom

$$K_f(\overline{x}) = \max_{x, \overline{x} \in I} \left|6\overline{x}^2 + 4\overline{x}(x - \overline{x}) + (x - \overline{x})^2\right|,$$

måste existera (polynom är Lipschitzkontinuerliga på ett begränsat slutet intervall I, och har därmed ett största resp. minsta värde på detsamma).

Slutsats: f är deriverbar med derivatan $f'(x) = 4x^3$. □

1.2 Uppgift 23.2

Prove directly from the definition that the derivative of $f(x) = \sqrt{x}$ equals $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ for $x > 0$.

Vill skriva f på formen (1) — fast nu kan vi inte använda Binomialsatsen. Försöker istället med

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} = \sqrt{\overline{x}} + \left(\sqrt{x} - \sqrt{\overline{x}}\right) = \sqrt{\overline{x}} + \frac{x - \overline{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{\overline{x}}} \\ &= \sqrt{\overline{x}} + \left(\frac{1}{2\sqrt{\overline{x}}} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{\overline{x}}} - \frac{1}{2\sqrt{\overline{x}}}\right)(x - \overline{x}) = \sqrt{\overline{x}} + \frac{1}{2\sqrt{\overline{x}}}(x - \overline{x}) + E_f(x, \overline{x}), \end{aligned} \tag{2}$$

där resttermerna

$$\begin{aligned} E_f(x, \overline{x}) &= \left(\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{\overline{x}}} - \frac{1}{2\sqrt{\overline{x}}}\right)(x - \overline{x}) = \frac{\sqrt{\overline{x}} - \sqrt{x}}{2\sqrt{\overline{x}}\left(\sqrt{x} + \sqrt{\overline{x}}\right)}(x - \overline{x}) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\overline{x}}\left(\sqrt{x} + \sqrt{\overline{x}}\right)^2}(x - \overline{x})^2. \end{aligned}$$

Har att felet är kvadratiskt litet

$$|E_f(x, \overline{x})| \leq K_f(\overline{x})(x - \overline{x})^2,$$

ty

$$K_f(\overline{x}) = \max_{x, \overline{x} \in I} \left| -\frac{1}{2\sqrt{\overline{x}}\left(\sqrt{x} + \sqrt{\overline{x}}\right)^2} \right|$$

existerar på ett begränsat slutet intervall I för $x > 0$. Alltså kan det från (2) identifieras att f är deriverbar med derivatan $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. □

1.3 Uppgift 23.4

Study the symmetric difference quotient approximation

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}, \quad h > 0, \tag{3}$$

and derive the optimal chocie of increment h.

Har de kubiska approximationerna

$$\begin{aligned} f(x + h) &\approx f(x) + f'(x)h + \tfrac{1}{2}f''(x)h^2 + \tfrac{1}{6}f'''(x)h^3, \\ f(x - h) &\approx f(x) - f'(x)h + \tfrac{1}{2}f''(x)h^2 - \tfrac{1}{6}f'''(x)h^3, \end{aligned}$$

så att

$$f(x + h) - f(x - h) \approx 2hf'(x) + \tfrac{1}{3}f'''(x)h^3.$$

Derivatan blir exakt när $h \to 0$ i den mening att *trunkeringsfelet* försvinner. Men vid numerisk approximation måste vi ta hänsyn till andra felkällor som t.ex. *avrundningfel*. Det växer när $h \to 0$. I MATLAB är den minsta igenkännbara skillnaden ϵ mellan två flyttal ungefär 10^{-16} (pröva att exekvera `1 + 1e-16 == 1` i MATLAB-prompten). Tydligen ska vi minimera

$$g(h) = \frac{(\text{trunkeringsfel}) + (\text{avrundningsfel})}{2h} \leq \frac{1}{6}Mh^2 + \frac{\epsilon}{h},$$

givet $|f'''(x)| \leq M$. Söker därför nollställen till $g'(h) = 0$

$$g'(h) = \frac{1}{3}Mh - \frac{\epsilon}{h^2} = 0 \implies h_{\text{opt}} = \left(\frac{3\epsilon}{M}\right)^{1/3}$$

så att $h_{\text{opt}} \approx 10^{-5}$ är bästa val av inkrement vid central differenskvot. □

1.4 Uppgift 23.6

Can you compute the derivative of $\sin(x)$ *and* $\cos(x)$ *from the definition?*

Nej, det går inte! Det är, som det visar sig under ALA-b (i samband med att de trigonometriska funktionerna definieras), emellertid ingen "motsägelse" i det.

Om man vill beräkna derivatorna enligt den alternativa definitionen

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{4}$$

går det bra. Skriver $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ (derivationsoperator). Då fås först

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\sin(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1) + \sin(h)\cos(x)}{h} = \cos(x), \end{aligned}$$

ty $\cos(h) \to 1$ samt $\frac{\sin(h)}{h} \to 1$ när $h \to 0$. Sedan

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\cos(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) + \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1) + \sin(h)\sin(x)}{h} = \sin(x), \end{aligned}$$

och vi är klara. Minns sambanden

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha), \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Anmärkning. Det är skillnad mellan definitionerna (1) och (4), men i allt annat än specialfall är de överensstämmande. För intresserade hänvisas till [AMBS, avs. 23.16]. □

1.5 Uppgift 24.3–24.4

Comment regarding the computation of the derivative of 2^x.

Har att

$$2^x = \mathrm{e}^{\ln(2^x)} = \mathrm{e}^{x\ln(2)},$$

så

$$\mathrm{D}2^x = \mathrm{D}\mathrm{e}^{x\ln(2)} = \ln(2)\mathrm{e}^{x\ln(2)} = \ln(2)2^x.$$

Mer allmänt: Genom ett trick har vi visat att derivatan

$$\mathrm{D}a^x = \ln(a)a^x.$$

□

1.6 Uppgift 24.6

Compute the partial derivatives of the function $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *given by* $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2x_3 + 5x_2^3x_3^4$.

Funktionen beror av tre variabler — hur varierar f med respektive? Vi söker vad som kallas *partiella derivator*: t.ex. betecknar $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ den partiella derivatan av f m.a.p. x_1. För att beräkna densamma deriveras f "som vanligt", medan övriga variabler x_1 och x_2 ses som konstanter, dvs.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1x_3,$$

ty derivatan av $2x_1^2$ är $4x_1$ (x_3 är i sammanhanget konstant). På samma sätt fås

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 15x_2^2x_3^4, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_1^2 + 20x_2^3x_3^3.$$

De partiella derivatorna kan samlas i en vektor vi kallar *gradient*:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1x_3 & 15x_2^2x_3^4 & 2x_1^2 + 20x_2^3x_3^3. \end{pmatrix}$$

Mer om det i ALA-b. □

2 DERIVERINGSUPPGIFTER

2.1 Uppgift 6d

Derivera $f(x) = \sqrt{\cos^3(x)(1-x^2)} = \left(\cos^3(x)(1-x^2)\right)^{1/2}$.

Vi får

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\left(\cos^3(x)(1-x^2)\right)^{1/2} &= \tfrac{1}{2}\left(\cos^3(x)(1-x^2)\right)^{-1/2} \\ &\quad \cdot \left[3\cos^2(x)\cdot(-\sin(x))\cdot(1-x^2) + \cos^3(x)\cdot(-2x)\right] \\ &= -\frac{\sqrt{\cos(x)}\left(3\sin(x)(1-x^2) + 2x\cos(x)\right)}{2\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

via kedje- och produktregeln samt förenkling. □

2.2 Uppgift 7d

Derivera partiellt $f(x) = \left(\frac{x}{(x+y)^2}\right)^3$.

Vi får

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 3\left(\frac{x}{(x+y)^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1\cdot(x+y)^2 - x\cdot 2(x+y)\cdot 1}{(x+y)^4}\right) \\
&= \frac{3x^2}{(x+y)^4} \cdot \frac{(x+y)^2 - 2x(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{3x^2}{(x+y)^6} - \frac{6x^3}{(x+y)^7}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 3\left(\frac{x}{(x+y)^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{0\cdot(x+y)^2 - x\cdot 2(x+y)\cdot 1}{(x+y)^4}\right) \\
&= \frac{3x^2}{(x+y)^4} \cdot \frac{-2x(x+y)}{(x+y)^4} = -\frac{6x^3}{(x+y)^7},
\end{aligned}$$

efter användning av kedje- och divisionsregeln samt förenkling. □