ALA-c 2006

RÄKNEÖVNING — VECKA 1–2

David Heintz, 24 januari 2006

Innehåll

1 Linearization and Stability

1.1 Uppgift 91.4

a) *Skriv systemet (första ordningens ODE, icke-linjärt, konstanta koefficienter)*

$$u_1'(t) = u_2(t)\big(1 - u_1^2(t)\big),$$
$$u_2'(t) = 2 - u_1(t)u_2(t),$$

på formen $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u})$. *Finn stationära punkter* $\bar{\mathbf{u}}$.

Vi utelämnar av bekvämlighet den oberoende variabeln t. Får därvid

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2\big(1-u_1^2\big) \\ 2 - u_1u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \tag{1}$$

på angiven form. Vidare ges stationära punkter av

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{o} \implies \begin{cases} u_2\big(1-u_1^2\big) = 0, \\ 2 - u_1u_2 = 0, \end{cases}$$

dvs. här som lösningen av ett homogent icke-linjärt ekvationssystem. Identifierar att första ekvationen är noll för $u_2 = 0$ eller $u_1 = \pm 1$, men eftersom den andra är nollskild för $u_2 = 0$, fås stationära punkter när $u_1 = 1, u_2 = 2$ alt. $u_1 = -1, u_2 = -2$, dvs. $\bar{\mathbf{u}}_{1,2} = \pm(1,2)$.

b) *Beräkna Jacobimatrisen* $\mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{u})$. *Linjärisera systemet* (1) *kring varje stationär punkt, dvs. skriv ner det linjäriserade systemet* $\mathbf{v}' = \mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}})\mathbf{v}$.

Jacobimatrisen samlar $\mathbf{f}$:s partiella derivator

$$\mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_1u_2 & 1-u_1^2 \\ -u_2 & -u_1 \end{pmatrix},$$

så att

$$\mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Låt sedan $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{v}(t)$ (där $\mathbf{v}(t)$ kan betraktas som en perturbation av ett jämviktsläge $\bar{\mathbf{u}}$). Det följer att

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} \implies \mathbf{v}' = (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})' = \mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{v}),$$

vars linjärisering kring $\bar{\mathbf{u}}$ blir

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{v}) \approx \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}) + \mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}})\mathbf{v} = \mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}})\mathbf{v},$$

eftersom $\bar{\mathbf{u}}$ var en stationär punkt. Alltså är de sökta linjäriserade systemen

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_1)\mathbf{v}, \tag{2}$$

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_2)\mathbf{v}. \tag{3}$$

c) *Lös det linjäriserade problemet analytiskt. Är de stationära punkterna stabila?*

Vi vet att ett linjärt första ordningens system av ODE med konstanta koefficienter

$$\begin{cases} \mathbf{v}' = \mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}})\mathbf{v}, \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \end{cases}$$

har den allmänna lösningen

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}\mathbf{g}_i, \tag{4}$$

där λ_i och $\mathbf{g}_i$ är egenvärden resp. egenvektorer till $\mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}})$ (se t.ex. [Dynamiskt system, S. Larsson] eller [Egenvärdesproblemet, S. Larsson]). Koefficienterna c_i kan bestämmas via begynnelsevillkoret för specifik lösning. Vi lärde oss också hur systemets stabilitet beror av egenvärdena.

För att besvara frågorna måste vi först lösa egenvärdesproblemet (se Uppgift 97.1 för närmare beskrivning).

i) $\quad \bar{\mathbf{u}}_1 = (1,2)$

1) bestäm egenvärden (lös karakteristiska ekvationen)

$$\det(\mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_1) - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4+\lambda)(1+\lambda) = 0,$$

dvs. $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$.

2) bestäm motsvarande egenvektorer (lös homogent linjärt ekvationssystem)

$\lambda_1 = -4$:

$$(\mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_1) - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{g}_1 = \mathbf{o} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs. $-2g_{11} + 3g_{12} = 0$. Med $g_{12} = s \in \mathbf{R}$ som fri parameter fås $g_{11} = \frac{3}{2}s$. Alltså blir tillhörande egenvektor

$$\mathbf{g}_1 = s\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \{s = 2\} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = -1$:

$$(\mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_1) - \lambda_2\mathbf{I})\mathbf{g}_2 = \mathbf{o} \iff \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs. $-3g_{21} = -2g_{21} = 0 \implies g_{21} = 0$. Med $g_{22} = t \in \mathbf{R}$ som fri parameter fås motsvarande egenvektor

$$\mathbf{g}_2 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \{t = 1\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen till det linjära systemet (2) fås från (4) till att vara

$$\mathbf{v}(t) = c_1 e^{-4t}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

och med negativa egenvärden drar vi slutsatsen att $\bar{\mathbf{u}}_1$ är en *stabil* stationär punkt.

ii) $\bar{\mathbf{u}}_2 = -(1,2)$

1) bestäm egenvärden (lös karakteristiska ekvationen)

$$\det(\mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_2) - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix}-4-\lambda & 0\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (4+\lambda)(\lambda-1) = 0,$$

dvs. $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$.

2) bestäm motsvarande egenvektorer (lös homogent linjärt ekvationssystem)

$\lambda_1 = -4$:

$$(\mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_2) - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{g}_1 = \mathbf{o} \iff \begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_{11}\\ g_{12}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

dvs. $2g_{11} + 5g_{12} = 0$. Med $g_{12} = s \in \mathbf{R}$ som fri parameter fås $g_{11} = -\frac{5}{2}s$. Med andra ord blir motsvarande egenvektor

$$\mathbf{g}_1 = s\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\ 1\end{pmatrix} = \{s = -2\} = \begin{pmatrix}5\\ -2\end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = 1$:

$$(\mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_2) - \lambda_2\mathbf{I})\mathbf{g}_2 = \mathbf{o} \iff \begin{pmatrix}-5 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_{21}\\ g_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

dvs. $-5g_{21} = 2g_{21} = 0 \implies g_{21} = 0$. Med $g_{22} = t \in \mathbf{R}$ som fri parameter fås motsvarande egenvektor

$$\mathbf{g}_2 = t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \{t = 1\} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen till det linjära systemet (3) är alltså

$$\mathbf{v}(t) = c_1 e^{-4t}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

och med ett positivt egenvärde visar sig $\bar{\mathbf{u}}_2$ vara en *instabil* stationär punkt. □

1.2 Uppgift 91.5

Uppgiften är väsentligen densamma som föregående. Vi lämnar därför beräkningarna utan ytterligare kommentarer.

a) *Skriv systemet (första ordningens ODE, icke-linjärt, konstanta koefficienter)*

$$u_1'(t) = u_1(t)\big(1 - u_2(t)\big),$$
$$u_2'(t) = u_2(t)\big(1 - u_1(t)\big),$$

på formen $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u})$. *Finn stationära punkter* $\bar{\mathbf{u}}$.

På efterfrågad form fås

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix}u_1'\\ u_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1(1-u_2)\\ u_2(1-u_1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_1(u)\\ f_2(u)\end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{u}). \tag{5}$$

Stationära punkter ges av

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{o} \implies \begin{cases}u_1(1-u_2) = 0,\\ u_2(1-u_1) = 0,\end{cases}$$

dvs. $\bar{\mathbf{u}}_1 = (0,0)$ samt $\bar{\mathbf{u}}_2 = (1,1)$ efter identifiering.

b) *Beräkna Jacobimatrisen* $\mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{u})$. *Linjärisera systemet* (5) *kring varje stationär punkt, dvs. skriv ner det linjäriserade systemet* $\mathbf{v}' = \mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}})\mathbf{v}$.

Jacobimatrisen blir

$$\mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-u_2 & -u_1\\ -u_2 & 1-u_1\end{pmatrix},$$

så att

$$\mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_1) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \mathbf{I}, \qquad \mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_2) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

De sökta linjäriserade systemen är

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix}v_1'\\ v_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_1)\mathbf{v}, \tag{6}$$

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix}v_1'\\ v_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}v_2\\ v_1\end{pmatrix} = \mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_2)\mathbf{v}. \tag{7}$$

c) *Lös det linjäriserade problemet analytiskt. Är de stationära punkterna stabila?*

Vi löser egenvärdesproblemet:

i) $\bar{\mathbf{u}}_1 = (0,0)$

Med reell symmetrisk systemmatris förväntar vi oss reella egenvärden samt möjlighet att välja ortonormala egenvektorer.

1) bestäm egenvärden (lös karakteristiska ekvationen)

$$\det(\mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_1) - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0,$$

dvs. $\lambda_{1,2} = 1$ (egenvärde med algebraisk multiplicitet 2).

Anmärkning. För triangulära — och då särskilt diagonala — systemmatriser återfinns egenvärdena på huvuddiagonalen (inses av att alla termer utom en i VL av karakterisktiska ekvationen blir noll). Vi hade här alltså inte behövt ställa upp karakteristiska ekvationen för att bestämma $\lambda_{1,2} = 1$. ■

2) bestäm motsvarande egenvektorer (lös homogent linjärt ekvationssystem)

$\lambda_{1,2} = 1$:

$$(\mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_1) - \lambda_{1,2}\mathbf{I})\mathbf{g} = \mathbf{o} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs. att $g_1 = s, g_2 = t, s, t \in \mathbb{R}$, båda måste vara fria parametrar. Därmed kan motsvarande egenvektorer väljas godtyckligt från planet

$$\mathbf{g} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Med $(s, t) = (1, 0)$ resp. $(s, t) = (0, 1)$ fås exempelvis ortonormalt

$$\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Anmärkning. När systemmatrisen är enhetsmatrisen ges egenvektorerna av enhetsvektorerna (detsamma är inte nödvändigt sant för triangulära systemmatriser). Vi hade här alltså inte behövt lösa ekvationssystem för att bestämma egenvektorerna $\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ och $\mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$. ■

Den allmänna lösningen till det linjära systemet (6) är

$$\mathbf{v}(t) = c_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

och med positiva egenvärden måste $\bar{\mathbf{u}}_1$ vara en *instabil* stationär punkt.

ii) $\bar{\mathbf{u}}_2 = (1, 1)$

1) bestäm egenvärden (lös karakteristiska ekvationen)

$$\det(\mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_2) - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0,$$

dvs. $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

2) bestäm motsvarande egenvektorer (lös homogent linjärt ekvationssystem)

$\lambda_1 = 1$:

$$(\mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_2) - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{g}_1 = \mathbf{o} \iff \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

där Gausselimination leder till

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs. $-g_{11} - g_{12} = 0$. Med $g_{12} = s \in \mathbf{R}$ som fri parameter fås $g_{11} = -s$. Alltså blir tillhörande egenvektor

$$\mathbf{g}_1 = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \{s = 1\} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = -1$:

$$(\mathrm{D}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}_2) - \lambda_2\mathbf{I})\mathbf{g}_2 = \mathbf{o} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

där Gausselimination leder till

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs. $g_{21} - g_{22} = 0$. Med $g_{22} = t \in \mathbf{R}$ som fri parameter fås $g_{21} = t$. Med andra ord blir motsvarande egenvektor

$$\mathbf{g}_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \{t = 1\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen till det linjära systemet (7) är alltså

$$\mathbf{v}(t) = c_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

och med ett positivt egenvärde är $\bar{\mathbf{u}}_2$ en *instabil* stationär punkt. □

2 Egenvärdesproblemet

2.1 Uppgift 97.1

Lös egenvärdesproblemet för matrisen $\mathbf{A}$ *i följande fall. Bestäm om möjligt en ortogonal egenvektormatris* $\mathbf{P}$*. Lös systemet*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \tag{8}$$

och avgör dess stabilitet.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Vi formulerar *egenvärdesproblemet*: Finn icke-triviala lösningar ($\mathbf{g} \neq \mathbf{o}$) till det linjära ekvationssystmet

$$\mathbf{A}\mathbf{g} = \lambda\mathbf{g}, \tag{9}$$

där λ kallas *egenvärde* med $\mathbf{g}$ som motsvarande *egenvektor* till $\mathbf{A}$.

Anmärkning. Geometriskt betyder (9) att vi söker riktningar utmed vilka transformationen från $\mathbf{A}$ reduceras till en skalning (mer allmänt kan matris-vektor-multiplikationer utöver skalning inkludera t.ex. rotation, reflektion i hyperplan, permutationer av komponenter, ...) — riktningar och skalningsfaktorer ges av $\mathbf{g}$ resp. λ. ■

För att lösa (9) skriver vi om systemet på den ekvivalenta homogena formen

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{g} = \mathbf{o}. \tag{10}$$

Kom ihåg att icke-triviala lösningar fås endast om koefficientmatris är singulär. Alltså måste

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0, \tag{11}$$

där (11) kallas *karakteristiska ekvationen*. Det är en polynomekvation

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0,$$

med rötter

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2} = \begin{cases} 5, \\ -2, \end{cases}$$

samma som $\mathbf{A}$:s egenvärden. För varje egenvärde (med $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är grad $p = n$ och p har lika många nollställen) löses sedan (10) för tillhörande egenvektor $\mathbf{g}_k$. Vanligen numreras egenvärden efter största magnitud: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Vi får då

$\lambda_1 = 5$:

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{g}_1 = \mathbf{o} \iff \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

där Gausselimination ger (här representerad via multiplikation med elementära eliminationsmatriser)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$
$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs. $-3g_{11} + 3g_{12} = 0$. Vi låter $g_{12} = s \in \mathbb{R}$ vara fri parameter så att $g_{11} = s$. Alltså är

$$\mathbf{g}_1 = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \{\text{välj godtyckligt } s = 1\} = \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = -2$:

$$(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})\mathbf{g}_2 = \mathbf{o} \iff \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

där Gausselimination leder till

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs. $4g_{21} + 3g_{22} = 0$. Vi låter $g_{22} = t \in \mathbb{R}$ vara fri parameter så att $g_{21} = -\frac{3}{4}t$. Då blir

$$\mathbf{g}_2 = t\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \{\text{välj godtyckligt } t = 4\} = \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Anmärkning. Notera följande: Givet $\mathbf{A}\mathbf{g} = \lambda\mathbf{g}$ fås efter multiplikation med $\alpha \in \mathbb{R}$ att

$$(\alpha\mathbf{A})\mathbf{g} = (\alpha\lambda)\mathbf{g} \iff \mathbf{A}(\alpha\mathbf{g}) = \lambda(\alpha\mathbf{g}),$$

där den vänstra likheten säger att om $\mathbf{A}$ har egenvärdet λ så har $\alpha\mathbf{A}$ egenvärdet $\alpha\lambda$, medan den högra säger att egenvektorer endast är bestämda upp till en skalär, dvs. till sin riktning, medan längden kan variera. ■

Egenvärdesmatrisen ges av

$$\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

med motsvarande egenvektormatris

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{g_1} & \mathbf{g_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Anmärkning. Notera att en ortogonal egenvektormatris inte kan bildas (för en ortogonal matris $\mathbf{Q}$ gäller att $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$):

$$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = 1(-3) + 1 \cdot 4 = 1 \neq 0,$$

dvs. $\mathbf{g}_1$ och $\mathbf{g}_2$ är inte ortogonala. Nödvändigt för en ortogonal matris är att kolonnvektorerna är ortonormala (utöver vinkelräta alltså även normerade). ■

Anmärkning. Med distinkta egenvärden kan man visa att egenvektorerna blir linjärt oberoende. Då är också $\mathbf{P}$ inverterbar och det gäller att

$$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix}\mathbf{Ag}_1 & \ldots & \mathbf{Ag}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\mathbf{g}_1 & \ldots & \lambda_n\mathbf{g}_n\end{pmatrix} = \mathbf{PD} \implies \mathbf{P^{-1}AP} = \mathbf{D},$$

och man säger att $\mathbf{A}$ är *diagonaliserbar*. Egenvektorerna kan vara linjärt oberoende även om egenvärden sammanfaller (algebraisk multiplicitet > 1) men det är inte säkert. ■

Den allmänna lösningen till det linjära systemet (8) fås nu via (4) som

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix},$$

så att systemet är *instabilt* med ett positivt egenvärde. □

c) $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix}5 & 4 & -2\\ 4 & 5 & 2\\ -2 & 2 & 8\end{pmatrix}$

Vi har att $\mathbf{A}$ är en reell symmetrisk matris. Man kan då visa att alla egenvärden är reella samt egenvektorerna kan väljas ortonormala. Alltså kommer vi att kunna bilda en ortogonal egenvektormatris så småningom. Men först:

1) bestäm egenvärden (lös karakteristiska ekvationen)

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix}5-\lambda & 4 & -2\\ 4 & 5-\lambda & 2\\ -2 & 2 & 8-\lambda\end{vmatrix} \qquad \{\text{utveckla efter rad } 1\}\\
&= (5-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 2 & 8-\lambda\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}4 & 2\\ -2 & 8-\lambda\end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix}4 & 5-\lambda\\ -2 & 2\end{vmatrix}\\
&= (5-\lambda)\big[(5-\lambda)(8-\lambda)-4\big] - 4\big[4(8-\lambda)-2(-2)\big]\\
&\quad - 2\big[4\cdot 2 - (5-\lambda)(-2)\big]\\
&= (5-\lambda)\big[\lambda^2 - 13\lambda + 36\big] - 4\big[36 - 4\lambda\big] - 2\big[18 - 2\lambda\big]\\
&= -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 81\lambda,
\end{aligned}$$

så att

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 18\lambda + 81) = 0 \implies \begin{cases}\lambda_3 = 0,\\ \lambda_{1,2} = 9 \pm \sqrt{81-81} = 9.\end{cases}$$

Vi har med andra ord reella egenvärden. Dessutom har ett av dem algebraisk multiplicitet 2, men eftersom $\mathbf{A}$ var reell och symmetrisk, ska fortfarande $\mathbf{g}_1$ och $\mathbf{g}_2$ kunna väljas linjärt oberoende (t.o.m. ortonormala).

2) bestäm motsvarande egenvektorer (lös homogent linjärt ekvationssystem)

$\lambda_{1,2} = 9$:

$$(\mathbf{A} - \lambda_{1,2}\mathbf{I})\mathbf{g} = \mathbf{o} \iff \begin{pmatrix}-4 & 4 & -2\\ 4 & -4 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_1\\g_2\\g_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

där Gausselimination ger

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 4 & -2\\ 4 & -4 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_1\\g_2\\g_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff$$
$$\begin{pmatrix}-4 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_1\\g_2\\g_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

dvs. $-4g_1 + 4g_2 - 2g_3 = 0$. Inför två fria parametrar $g_2 = s, g_3 = t, s, t \in \mathbb{R}$, så att $g_1 = \frac{2s-t}{2}$. Alltså är

$$\mathbf{g} = s\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\mathbf{r}_1} + t\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}}_{\mathbf{r}_2},$$

vilket motsvarar ett plan genom origo med riktningsvektorer $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$. Alla vektorer i planet satisfierar (9) och är egenvektorer till $\mathbf{A}$. Kan godtyckligt välja två stycken. Särskilt, via t.ex. Gram-Schmidt-ortogonalisering, två ortonormala sådana:

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \{s = 1,\, t = 0\}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \quad \{s = 0,\, t = 2\},$$

där

$$\mathbf{g}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{q}_1\|_2}\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_2 = \mathbf{q}_2 - \left(\mathbf{g}_1^T\mathbf{q}_2\right)\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 2\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}_2 = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{g}}_2\|_2}\tilde{\mathbf{g}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{pmatrix},$$

motsvarande direkta — men kanske inte uppenbara — val av $(s,t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ för $\mathbf{g}_1$ samt $(s,t) = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ för $\mathbf{g}_2$.

Anmärkning. $\mathbf{q}_1$ och $\mathbf{g}_2$ är också giltiga egenvektorer. Gram-Schmidt-ortogonaliseringen ger dock ortonormala sådana, som spänner upp samma rum, dvs. $\operatorname{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\} = \operatorname{span}\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ (man kan bilda endera vektorparet som en linjärkombination av det andra). $\blacksquare$

$\lambda_3 = 0:$

$$(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})\mathbf{g} = \mathbf{o} \iff \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

där Gausselimination ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & \frac{9}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & \frac{18}{5} & \frac{36}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & \frac{9}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & \frac{18}{5} & \frac{36}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs. att $g_{32} + 2g_{33} = 0$. Inför fri parameter $g_{33} = s \in \mathbb{R}$ så att $g_{23} = -2s$. Då blir, från första ekvationen, $g_{13} = \frac{1}{5}(8s + 2s) = 2s$. Därmed

$$\mathbf{g}_3 = s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{\text{välj } s = \tfrac{1}{3} \text{ för normerad egenvektor}\right\} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3) sätt upp egenvärdes- och egenvektormatris

Egenvärdesmatrisen ges av

$$\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

medan den ortogonala egenvektormatrisen är

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen till det linjära systemet (8) fås till

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{9t} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{9t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

så att systemet är *instabilt* med två positiva egenvärden. $\square$

3 Dynamiskt system

3.1 Uppgift 5

Bestäm stationära punkter och avgör deras stabilitet för följande system.

c) Vi har

$$X_1' = X_1 + X_1X_2^2 + X_1X_3^2, \tag{12}$$
$$X_2' = -X_1 + X_2 - X_2X_3 + X_1X_2X_3, \tag{13}$$
$$X_3' = X_2 + X_3 - X_1^2, \tag{14}$$

eller $\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ på vektorform. Stationära punkter ges av $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{O}$. För (12) identifieras

$$X_1' = X_1 + X_1X_2^2 + X_1X_3^2 = X_1\underbrace{\left(1 + X_2^2 + X_3^2\right)}_{>0} = 0,$$

om $X_1 = 0$. För (13) följer

$$X_2' = -X_1 + X_2 - X_2X_3 + X_1X_2X_3 = \{X_1 = 0\} = X_2 - X_2X_3 = X_2\left(1 - X_3\right) = 0,$$

om $X_2 = 0$ eller $X_3 = -1$. Sist för (14)

$$X_3' = X_2 + X_3 - X_1^2 = \begin{cases} X_3 = 0, & \text{om } X_1 = X_2 = 0, \\ X_2 + 1 = 0, & \text{om } X_1 = 0, X_3 = 1, \end{cases}$$

dvs. att vi får två stationära punkter: $\bar{\mathbf{X}}_1 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$ samt $\bar{\mathbf{X}}_2 = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$.

Vidare ges linjäriseringen av $\mathbf{F}$ — och därigenom av systemet — kring en stationär punkt $\bar{\mathbf{X}}$ som

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \approx \underbrace{\mathbf{F}(\bar{\mathbf{X}})}_{=0} + \mathbf{F}'(\bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) = \mathbf{F}'(\bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}),$$

där

$$\mathbf{F}'(\bar{\mathbf{X}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} & \frac{\partial F_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} & \frac{\partial F_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial X_1} & \frac{\partial F_3}{\partial X_2} & \frac{\partial F_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + X_2^2 + X_3^2 & 2X_1X_2 & 2X_1X_3 \\ -1 + X_2X_3 & 1 - X_3 + X_1X_3 & -X_2 + X_1X_2 \\ -2X_1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

så att

$$\mathbf{F}'(\bar{\mathbf{X}}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}'(\bar{\mathbf{X}}_1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De linjäriserade systemen är $\mathbf{X}' = \mathbf{F}'(\bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})$ att lösa för $\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}$. Här ska emellertid endast deras stabilitet avgöras (räcker att bestämma egenvektorer för motsvarande system- och Jacobimatriser).

1) $\quad \bar{\mathbf{X}}_1 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$

Har att $\mathbf{F}'(\bar{\mathbf{X}}_1)$ är nedåt triangulär så att egenvärdena återfinns på huvuddiagonalen: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (algebraisk multiplicitet 3). Positiva egenvärden medför *instabilt* system.

2) $\quad \bar{\mathbf{X}}_2 = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$

Får karakteristiska ekvationen

$$\begin{aligned} \det\left(\mathbf{F}'(\bar{\mathbf{X}}_2) - \lambda\mathbf{I}\right) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \qquad \{\text{utveckla efter rad 1}\} \\ &= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left(\lambda(\lambda-1) - 1\right) \\ &= (3-\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda - 1\right) = 0, \end{aligned}$$

dvs. $\lambda_1 = 3$ samt $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Med två positiva egenvärden blir m.a.o. systemet *instabilt*. $\square$

4 Linjär algebra

4.1 Uppgift 5

Låt V vara ett underrum till $\mathbb{R}^m$ av dimension $n < m$, som spänns upp av kolonnvektorerna i matrisen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Projektionsmatrisen $\mathbf{P}$ för ortogonal projektion på V ges av

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^T.$$

Visa att $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$ om kolonnerna i $\mathbf{Q}$ är ortonormala. Avancerat: Bevisa formeln för $\mathbf{P}$.

Med ortonormala kolonnvektorer $\mathbf{q}_i$ gäller att element ij i $n \times n$-produkten $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$ är

$$\left\{\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right\}_{ij} = (\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) = \begin{cases} 1, & \text{om } i = j, \\ 0, & \text{annars,} \end{cases}$$

dvs. $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ och det följer att

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{I}^{-1}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{I}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T,$$

vilket skulle visas.

För att $\mathbf{P}$ ska vara en ortogonal projektion på span$\{\mathbf{Q}\}$ måste

- $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ $\quad$ $\{\mathbf{P}$ är *idempotent*$\}$
- $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$ $\quad$ $\{\mathbf{P}$ är *symmetrisk*$\}$

Minns räknereglerna

(i) $(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$,

(ii) $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$.

Vi kontrollerar:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^2 &= \mathbf{Q}\underbrace{\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}}_{=\mathbf{I}}\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^T = \mathbf{P}, \\
\mathbf{P}^T &= \left(\mathbf{Q}\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^T\right)^T = \mathbf{Q}\left(\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right)^{-1}\right)^T\mathbf{Q}^T \overset{\text{(ii)}}{=} \mathbf{Q}\left(\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right)^T\right)^{-1}\mathbf{Q}^T \\
&\overset{\text{(i)}}{=} \mathbf{Q}\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^T = \mathbf{P},
\end{aligned}$$

dvs. att den givna formeln överensstämmer med definitionen (är m.a.o. en ortogonal projektion).

För att vidare (egentligen inte del av uppgiften) motivera definitionen kan vi pröva

- $\mathbf{P}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}$ $\quad$ $\{\mathbf{P}$ ändrar inte på vektorer redan i span$\{\mathbf{Q}\}\}$
- $(\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{A})^T\mathbf{Q} = \mathbf{O}$ $\quad$ $\{$skillnadsvektorn är ortogonal mot alla vektorer i span$\{\mathbf{Q}\}\}$

Vi kontrollerar ytterligare en gång:

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\underbrace{\left(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}}_{=\mathbf{I}} = \mathbf{Q}, \\
(\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{A})^T\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T\mathbf{Q} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}^T\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T\mathbf{Q} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T\mathbf{Q} - \mathbf{A}^T\mathbf{Q} = \mathbf{O},
\end{gathered}$$

och känner oss tillfreds med resultatet. □

4.2 Uppgift 14

Visa att om λ är egenvärde till $\mathbf{A}$ så är λ^{-1} egenvärde till $\mathbf{A}^{-1}$.

Givet att $\mathbf{A}$ är inverterbar förlänger vi (9) med $\lambda^{-1}\mathbf{A}^{-1}$:

$$\lambda^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{g} = \lambda^{-1}\mathbf{A}^{-1}\lambda\mathbf{g},$$

och förenklar ledvis

$$\begin{aligned}
&\text{VL: } \lambda^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{g} = \lambda^{-1}\mathbf{I}\mathbf{g} = \lambda^{-1}\mathbf{g}, \\
&\text{HL: } \lambda^{-1}\mathbf{A}^{-1}\lambda\mathbf{g} = \mathbf{A}^{-1}\lambda^{-1}\lambda\mathbf{g} = \mathbf{A}^{-1}\cdot 1\cdot\mathbf{g} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g},
\end{aligned}$$

så att $\lambda^{-1}\mathbf{g} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}$. Men detta är ju på formen (9), med λ^{-1} som egenvärde till $\mathbf{A}^{-1}$, vilket skulle visas. □