ALA-c 2006

RÄKNEÖVNING — VECKA 5

David Heintz, 11 februari 2006

Innehåll

1 Kurvintegraler

1.1 Uppgift 2

Låt Γ *vara den cirkulära helixen* $\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix}\cos(t) & \sin(t) & t\end{pmatrix}^T$ *med* $t \in [0, 2\pi)$. *Beräkna kurvintegralerna* $\displaystyle\int_\Gamma u\,\mathrm{d}s$.

c) $u(\mathbf{x}) = x_1 x_2 x_3$

Kurvintegralen av u över Γ defineras av [AMBS, avs. 63.3]:

$$\int_\Gamma u\ \mathrm{d}s = \int_\Gamma u(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s(\mathbf{x}) = \int_a^b u(\mathbf{s}(t))\|\mathbf{s}'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Med den givna parametriseringen är

$$\begin{aligned} u(\mathbf{s}(t)) &= \cos(t)\sin(t)t, \\ \mathbf{s}'(t) &= \begin{pmatrix}-\sin(t) & \cos(t) & 1\end{pmatrix}^T, \\ \|\mathbf{s}'(t)\| &= \Big(\underbrace{(-\sin(t))^2 + \cos^2(t)}_{=1} + 1^2\Big)^{1/2} = \sqrt{2}, \end{aligned}$$

och efter insättning får vi

$$\begin{aligned} \int_\Gamma u\,\mathrm{d}s &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cos(t)\sin(t)t\,\mathrm{d}t \overset{\text{PI}}{=} \sqrt{2}\left(\left[\tfrac{1}{2}\sin^2(t)t\right]_0^{2\pi} - \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \left\{\sin^2(t) = \tfrac{1}{2}\big(1-\cos(2t)\big)\right\} = 0 - \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\big(1-\cos(2t)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \tfrac{-1}{2\sqrt{2}}\left[t - \tfrac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Notera att sinusfunktionerna alla var 0 för $t = 0$, $t = 2\pi$. □

1.2 Uppgift 6

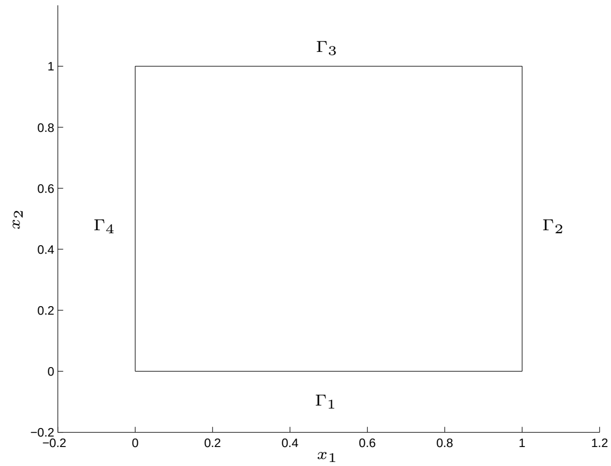
En partikel rör sig moturs runt kvadraten $0 \le x_1, x_2 \le 1,\ x_3 = 0$, *under inverkan av kraftfältet* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}(x_1 - x_2)^2 & 2x_2 + x_1^2 & x_1\end{pmatrix}^T$. *Beräkna arbetet som uträttas.*

Arbetet ges av *linjeintegralen* [AMBS, avs. 63.5]:

$$\int_\Gamma \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{s}(t))\cdot\mathbf{s}'(t)\,\mathrm{d}t.$$

I vårt fall bör emellertid randen delas in i fyra stycken för att möjliggöra enkel parametrisering (linjeintegralen blir således summan av delintegralerna över resp. randstycke):

$$\int_\Gamma \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{4}\int_{a_i}^{b_i} \mathbf{f}(\mathbf{s}_i(t))\cdot\mathbf{s}_i'(t)\,\mathrm{d}t.$$



Figur 1: Indelning av randen i fyra stycken

En möjlig parametrisering är

$$\mathbf{s}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1, \qquad \mathbf{s}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1,$$
$$\mathbf{s}_3(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1, \qquad \mathbf{s}_4(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1,$$

där vi tänker oss kurvan genomlöpt moturs med start i punkten $(0,\ 0)$. De fyra delintegralerna blir:

Γ_1:

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}_1(t)) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d}\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_1'(t)\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t,$$
$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{f}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}_1 = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{3},$$

Γ_2:

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}_2(t)) = \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d}\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_2'(t)\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t,$$
$$\int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}_2 = \int_0^1 (2t+1)\,\mathrm{d}t = \left[t^2 + t\right]_0^1 = 2,$$

Γ_3:

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}_3(t)) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2+(1-t)^2 \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d}\mathbf{s}_3 = \mathbf{s}_3'(t)\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t,$$

$$\int_{\Gamma_3} \mathbf{f}_3 \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}_3 = -\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = -\left[\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 = -\tfrac{1}{3},$$

Γ_4:

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}_4(t)) = \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ 2(1-t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d}\mathbf{s}_4 = \mathbf{s}_4'(t)\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t,$$

$$\int_{\Gamma_4} \mathbf{f}_4 \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}_4 = -2\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = -2\left[t-\tfrac{1}{2}t^2\right]_0^1 = -1.$$

Avslutningsvis summerar vi delresultaten:

$$\int_\Gamma \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} \mathbf{f}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}_i = \tfrac{1}{3} + 2 - \tfrac{1}{3} - 1 = 1.$$

$\square$

1.3 Uppgift 15

Visa att om den plana kurvan i polära koordinater representeras av $s(\theta) = (\rho(\theta), \theta)$, med radien ρ som funktion av vinkeln θ, där $a \leq \theta \leq b$, så är $ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2$, och kurvans längd blir

$$L(\Gamma) = \int_a^b \left(\rho^2 + \left(\rho'\right)^2\right)^{1/2} d\theta.$$

Bestäm längden av kardioiden $\rho = 1 - \cos(\theta)$ med $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

I ”vanliga” kartesiska koordinater (rektangulära) ges längden av en kurva Γ som

$$L(\Gamma) = \int_\Gamma \|s'(t)\|\,dt,$$

där $s(t)$ är en parametrisering av Γ.

En kurva som beskrivs i polära koordinater blir

$$s(\theta) = \begin{bmatrix} \rho\cos(\theta) \\ \rho\sin(\theta) \end{bmatrix}, \qquad a \leq \theta \leq b,$$

eller, med $\rho = \rho(\theta)$, istället

$$s(\theta) = \begin{bmatrix} \rho(\theta)\cos(\theta) \\ \rho(\theta)\sin(\theta) \end{bmatrix}, \qquad a \leq \theta \leq b.$$

Bågelementet ds uttryckt i polära koordinater fås därför genom

$$\begin{aligned}
s'(\theta) &= \begin{bmatrix} \rho'(\theta)\cos(\theta) - \rho(\theta)\sin(\theta) \\ \rho'(\theta)\sin(\theta) + \rho(\theta)\cos(\theta) \end{bmatrix}, \\
\|s'(\theta)\| &= \Big(\big(\rho'(\theta)\cos(\theta) - \rho(\theta)\sin(\theta)\big)^2 + \big(\rho'(\theta)\sin(\theta) + \rho(\theta)\cos(\theta)^2\Big)^{1/2} \\
&= \big((\rho'(\theta))^2 \left[\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right] + \rho^2(\theta) \left[\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right] \big)^{1/2} \\
&= ((\rho'(\theta))^2 + \rho^2(\theta))^{1/2}, \\
ds &= \|s'(\theta)\| d\theta = ((\rho'(\theta))^2 + \rho^2(\theta))^{1/2} d\theta,
\end{aligned}$$

och det framgår att kurvans längd måste vara

$$\int_a^b ((\rho'(\theta))^2 + \rho^2(\theta))^{1/2} d\theta.$$

Längden av kardioiden är en gammal bekant (jämför med uppgift 63.1c från förra övningen). Vi har att

$$\rho(\theta) = 1 - \cos(\theta), \qquad \rho^2(\theta) = 1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta),$$
$$\rho'(\theta) = \sin(\theta), \qquad (\rho'(\theta))^2 = \sin^2(\theta),$$

och det följer

$$\begin{aligned}
\int_a^b ((\rho'(\theta))^2 + \rho^2(\theta))^{1/2} d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2(\theta) + 1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)\right)^{1/2} \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (2 - 2\cos(\theta))^{1/2} \, d\theta,
\end{aligned}$$

där $\cos(\theta) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Alltså

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} (2 - 2\cos(\theta))^{1/2} \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{1/2} \, d\theta = \int_0^{2\pi} 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \, d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \, d\theta = 2\left[-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = -4(-1-1) = 8,
\end{aligned}$$

vilket är samma resultat som förut (det var ju bra).

2 Kapitel 64

2.1 Uppgift 1

Beräkna integralerna med $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ (enhetskvadraten).

(a) $\int_\Omega (x_1 + x_2)\, dx$

Genom upprepad integration fås

$$\begin{aligned} \int_\Omega (x_1 + x_2)\, dx &= \int_0^1 \int_0^1 (x_1 + x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x_1^2 + x_1 x_2\right]_0^1 dx_2 \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + x_2\right) dx_2 = \left[\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_2^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(2-0) = 1. \end{aligned}$$

Notera att integrationsordningen här inte spelar någon roll. Det beror på att Ω kan beskrivas utan att någon variabel beror av en annan i övre eller undre gräns. Ibland kan valet av integrationsordning styras genom att återge Ω på olika — men ekvivalenta — sätt. Man hoppas därigenom underlätta kommande beräkningar. Jämför med nästa uppgift.

2.2 Uppgift 2

Beräkna integralerna med $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le x_2 \le 1\}$.

(a) $\int_\Omega \frac{x_1}{x_2}\, dx$

För att ta reda på hur integrationsområdet ser ut, underlättar det många gånger att rita de begränsande linjerna, och se efter vilket område som innesluts. Här har vi t.ex. tre sådana linjer, nämligen $x_1 = 0$, $x_2 = x_1$ samt $x_2 = 1$. I Figur 2.2 och framåt — åtminstone när det "behövs" — är de begränsande linjerna streckade, medan det resulterande integrationsområdet får heldragna ränder. Tydligen är Ω triangeln med hörn i punkterna $(0,0), (1,1)$ och $(0,1)$.

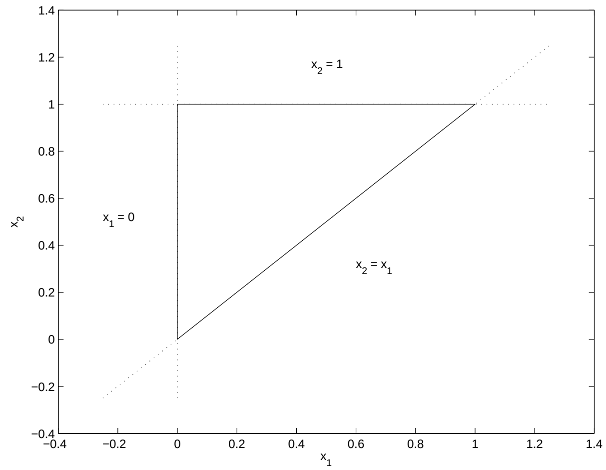
Vi väljer att börja integrera m.a.p. x_1 (låter därmed x_1 bero av x_2 i övre gräns):

$$\int_0^1 \int_0^{x_2} \frac{x_1}{x_2}\, dx_1 dx_2 = \int_0^1 \left[\frac{1}{2x_2}x_1^2\right]_0^{x_2} dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{2}x_2\, dx_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x_2^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Vi hade istället kunnat inleda integrationen m.a.p. x_2. Då hade integralen att lösa blivit

$$\int_0^1 \int_{x_1}^1 \frac{x_1}{x_2}\, dx_2 dx_1,$$

vilket emellertid inneburit betydligt krångligare beräkningar (pröva!). Ofta gör man bäst i att börja integrera det som "ser lättast ut" (här verkar t.ex. den primitiva funktionen till x_1 vara enklare än den för x_2).



Figur 2: Ett triangulärt integrationsområde

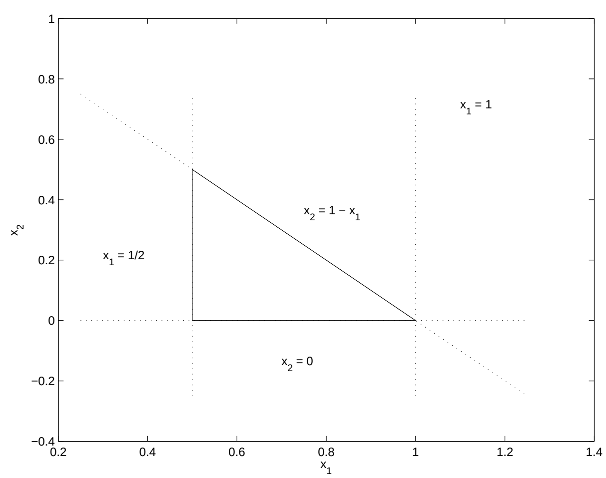
2.3 Uppgift 3

Ändra integrationsordning i integralerna.

(a) $\int_{1/2}^{1}\int_{0}^{1-x_1} f(x_1,x_2)\, dx_2 dx_1$

Vi ser att x_2 är given att bero av x_1 i övre gräns — med andra ord måste integrationen inledas m.a.p. x_2.

Integrationsområdet Ω är triangeln med hörn i punkterna $\left(\frac{1}{2},0\right),(1,0)$ och $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ enlig Figur 2.3.



Figur 3: Ytterligare ett triangulärt integrationsområde

Vi ställer oss frågan huruvida Ω kan beskrivas annorlunda, för att därigenom möjliggöra ett byte av integrationsordning (om integrationen ska inledas m.a.p. x_1 istället får inte x_2 bero av x_1 i någon gräns). Så är faktiskt fallet — samma område ges nämligen av

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 - x_2 \\ 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2} \end{cases},$$

vilket inses genom att fixera x_2:s övre gräns. Den ”nya” integralen, med ändrad integrationsordning, blir

$$\int_0^{1/2} \int_{1/2}^{1-x_2} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2.$$

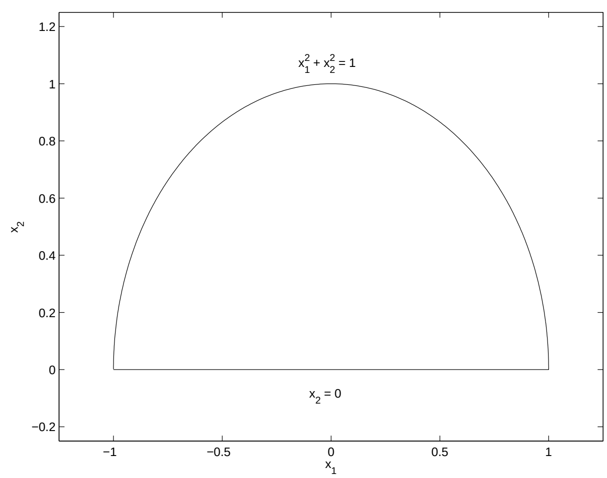
Ett försök om man kör fast i sina beräkningar, och har eländiga integrander att tampas med, är att byta integrationsordning, vilket kan visa sig ge betydligt lättare primitiva funktioner.

2.4 Uppgift 4

Beräkna integralerna.

(b) $\int_\Omega x_1^2 x_2\, dx, \qquad \Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ 0 \leq x_2\right\}$

Ofta är första hindret att ta reda på hur integrationsområdet ser ut. Här är det halvan av enhetsskivan med positiv x_2-koordinat.



Figur 4: Halva enhetsskivan

Variabelsubstitution görs för det mesta med avsikten att förenkla ett knepigt integrationsområde. Ibland ser man snabbt vilken substitution som är lämplig, exempelvis vid ”cirkulära” områden, då det passar bra att övergå i polära koordinater, vilket vi också gör

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\theta) \\ x_2 = r\sin(\theta) \end{cases}, \qquad 0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Bytet överför beräkningarna från Ω_1 i x_1x_2-planet till det rektangulära Ω_2 i $r\theta$-planet.

Här måste vi, precis som i ”vanliga” integraler i en dimension, hålla ordning på areaskalningen i avbildningen. Det tidigare lokala areaelementet dx_1dx_2 ska ju bli till ett nytt $drd\theta$. Förhållandet dem emellan är

$$dx_1dx_2 = \left|\det\left(\frac{d(x_1,x_2)}{d(r,\theta)}\right)\right| drd\theta,$$

där determinanten kallas *funktionaldeterminant*. Matrisen $\frac{d(x_1,x_2)}{d(r,\theta)}$ är Jacobianen för avbildningen och bestäms till

$$\frac{d(x_1,x_2)}{d(r,\theta)} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix} \implies \left|\det\left(\frac{d(x_1,x_2)}{d(r,\theta)}\right)\right| = r\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right) = r.$$

Vi har med andra ord att $dx_1dx_2 = rdrd\theta$. Integralen att beräkna blir slutligen

$$\begin{aligned} \int_\Omega x_1^2x_2\ dx &= \int_0^1\int_0^\pi r^2\cos^2(\theta)r\sin(\theta)r\ drd\theta = \int_0^1 r^4\ dr\int_0^\pi \cos^2(\theta)\sin(\theta)\ d\theta \\ &= \left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1\left[-\frac{1}{3}\cos^3(\theta)\right]_0^\pi = \left(\frac{1}{5}-0\right)\left(-\frac{1}{3}(-1-1)\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

2.5 Uppgift 5

Finn volymen under grafen för funktionerna.

(b) $f(x) = x_1^2e^{-x_1-x_2}, \qquad 0 \le x_1 \le 1, \qquad 0 \le x_2 \le 2$

Nettovolymen mellan funktionsgrafen och x_1x_2-planet ges av

$$V = \int_\Omega f(x)\ dx.$$

Därav följer

$$V = \int_0^1\int_0^2 x_1^2e^{-x_1-x_2}\ dx_2dx_1 = \int_0^1 x_1^2e^{-x_1}\underbrace{\left[-e^{-x_2}\right]_0^2}_{=1-e^{-2}}\ dx_1 = \left(1-e^{-2}\right)\underbrace{\int_0^1 x_1^2e^{-x_1}\ dx_1}_{=I},$$

och vi fortsätter genom att bestämma I via upprepad partiell integration

$$\begin{aligned} I &= \underbrace{\left[-x_1^2e^{-x_1}\right]_0^1}_{=-e^{-1}} + 2\int_0^1 x_1e^{-x_1}\ dx_1 \\ &= -e^{-1} + 2\left(\underbrace{\left[-x_1e^{-x_1}\right]_0^1}_{=-e^{-1}} + \int_0^1 e^{-x_1}\ dx_1\right) \\ &= -3e^{-1} + 2\underbrace{\left[-e^{-x_1}\right]_0^1}_{=1-e^{-1}} = 2-5e^{-1}, \end{aligned}$$

för att slutligen bilda nettovolymen som produkten

$$V = (1 - e^{-2})I = (1 - e^{-2})(2 - 5e^{-1}).$$

2.6 Uppgift 8

Beräkna

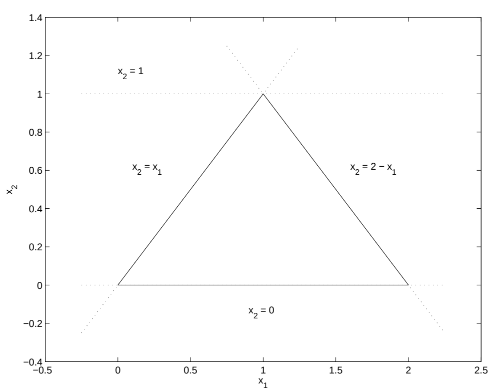
$$\int_\Omega \frac{x_1 + x_2}{x_1^2} e^{x_1+x_2}\, dx,$$

där $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq x_1 \leq 2 - x_2,\ 0 \leq x_2 \leq 1\right\}$.

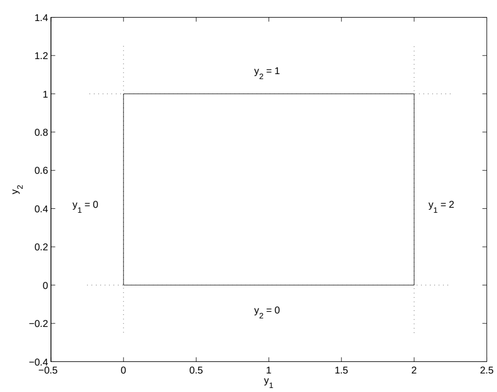
Vi utnyttjar den föreslagna substitutionen

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = \frac{x_2}{x_1} \end{cases},$$

vilket avbildar det triangulära integrationsområdet i x_1x_2-planet till ett rektangulärt dito i y_1y_2-planet. Här motsvaras linjestycket $y_2 = 0$ i y_1y_2-planet av $x_2 = 0$ i x_1x_2-planet (pröva



Figur 5: Ω_1 i x_1x_2-planet



Figur 6: Ω_2 i y_1y_2-planet

genom insättning), $y_1 = 2$ motsvaras på samma sätt av $x_2 = 2 - x_1$, medan $y_2 = 1$ kommer sig av $x_2 = x_1$. Området sluts sedan av linjestycket $y_1 = 0$ (ty $x_1, x_2 \geq 0$ så att $y_1 \geq 0$). En variabelsubstitution medför en areaskalning som bestäms via

$$\frac{d(y_1, y_2)}{d(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \end{pmatrix} \implies \det\left(\frac{d(y_1, y_2)}{d(x_1, x_2)}\right) = \frac{1}{x_1} + \frac{x_2}{x_1^2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1^2},$$

eftersom

$$\det\left(\frac{d(x_1, x_2)}{d(y_1, y_2)}\right) = \frac{1}{\det\left(\frac{d(y_1,y_2)}{d(x_1,x_2)}\right)} = \frac{x_1^2}{x_1 + x_2},$$

då $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ (förutsatt att A är inverterbar). Den beräknade skalningsfaktorn $\frac{x_1^2}{x_1+x_2}$ ska dessutom tas i absolutbelopp. Hursomhelst innebär den att integranden förenklas, i det att kvoterna tar ut varandra, så vad som till slut återstår är

$$\int_\Omega \frac{x_1 + x_2}{x_1^2} e^{x_1+x_2}\, dx \quad = \quad \int_0^1 \int_0^2 e^{y_1}\, dy_1 dy_2 = \int_0^2 e^{y_1}\, dy_1 = [e^{y_1}]_0^2 = e^2 - 1.$$