ALA-c 2005

RÄKNEÖVNING — VECKA 7

David Heintz, 20 mars 2005

Innehåll

1 Kapitel 68

1.1 Uppgift 5

Låt Γ vara enhetssfären i $\mathbb{R}^3$ med utåtriktad normal n. Beräkna integralerna.

(a) $\int_\Gamma x \cdot n \, ds$

Notera att Γ här representerar en yta och ds ett ytelement. AMBS använder ofta samma notation för kurva respektive kurvlängdselement (alternativt båg- eller tangentvektorelement). Det kan upplevas förvirrande. Man måste med andra ord tänka sig för.

Ytintegralen bestäms per definition av

$$\int_\Gamma x \cdot n \, ds = \int_I x(s(y)) \cdot n(s(y)) \|s_1' \times s_2'\| \, dy,$$

där $s(y)$ med $y \in I$ är en parametrisering av ytan. Men eftersom Γ är rand till det kompakta enhetsklotet Ω, samt $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, kan vi istället tillämpa divergenssatsen

$$\int_\Gamma x \cdot n \, ds = \int_\Omega \nabla \cdot x \, dx,$$

som i fysikaliska termer kan översättas med att den stationära strömningen x genom randen uppvägs av en produktion av det strömmande mediet någonstans i Ω. Nu fås

$$\nabla \cdot u = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = 3,$$

så att

$$\int_\Omega \nabla \cdot x \, dx = 3 \int_\Omega dx = 3V(\Omega).$$

Eftersom volymen av en sfär är $\frac{4\pi R^3}{3}$ blir den sökta ytintegralen 4π med radien $R = 1$. Kommer man inte ihåg sina formler får man räkna istället (använd sfäriska koordinater)

$$V(\Omega) = \int_\Omega dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \sin(\varphi) \, dr d\varphi d\theta = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{=2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin(\varphi) \, d\varphi}_{=2} \underbrace{\int_0^1 r^2 \, dr}_{=\frac{1}{3}} = \frac{4\pi}{3},$$

vilket ger samma svar (om än efter lite merarbete).

(c) $\int_\Gamma \frac{1}{\|x\|^2} \frac{x}{\|x\|} \cdot n \, ds$

Trots att integranden liknar den förra, särskilt som $\|x\| = 1$, får vi inte använda divergenssatsen. Det beror på att $\frac{x}{\|x\|^3}$ inte är definierad i origo (man kan inte sätta $\|x\| = 1$ om integralen ska beräknas över hela Ω). Man får ett felaktigt svar om satsen tillämpas (varsågod att pröva).

Vi måste lita till definitionen. Med $n = \frac{x}{\|x\|}$ som en utåtriktad enhetsnormal ges

$$\int_\Gamma \frac{1}{\|x\|^2} \frac{x}{\|x\|} \cdot n \, ds = \frac{1}{\|x\|^2} \int_\Gamma ds = \int_\Gamma ds,$$

ty $x \cdot x = \|x\|^2$. Att lösa integralen motsvarar tydligen att bestämma sfärens mantelyta. Den är som bekant $4\pi R^2$ och i vårt fall blir det 4π.

Envisas man med att räkna ut arean måste ytan först parametriseras. Det kan exempelvis göras via $s(\varphi, \theta) = (\sin(\varphi)\cos(\theta), \sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\varphi))$, med $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$, och ytans riktningsvektorer blir

$$\begin{aligned} s'_\varphi &= (\cos(\varphi)\cos(\theta), \cos(\varphi)\sin(\theta), -\sin(\varphi)), \\ s'_\theta &= (-\sin(\varphi)\sin(\theta), \sin(\varphi)\cos(\theta), 0), \end{aligned}$$

med kryssprodukten (räkneschemat fordrar utveckling efter första raden)

$$\begin{aligned} s'_\varphi \times s'_\theta &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) & -\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\ &= e_1 \begin{vmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad + e_3 \begin{vmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\cos(\theta) \end{vmatrix} \\ &= (1, 0, 0) \sin^2(\varphi)\cos(\theta) + (0, 1, 0) \sin^2(\varphi)\sin(\theta) \\ &\quad + (0, 0, 1) \underbrace{\left(\cos(\varphi)\cos^2(\theta)\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\sin^2(\theta)\sin(\varphi)\right)}_{=\cos(\varphi)\sin(\varphi)} \\ &= \left(\sin^2(\varphi)\cos(\theta), \sin^2(\varphi)\sin(\theta), \cos(\varphi)\sin(\varphi)\right), \end{aligned}$$

samt normen (motsvarar arean av det lokala ytelementet)

$$\begin{aligned} \|s'_\varphi \times s'_\theta\| &= \left(\sin^4(\varphi)\cos^2(\theta) + \sin^4(\varphi)\sin^2(\theta) + \cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)\right)^{1/2} \\ &= \left(\sin^4(\varphi) + \cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)\right)^{1/2} = \left(\sin^2(\varphi)\right)^{1/2} = \sin(\varphi). \end{aligned}$$

Mantelytan bestäms nu som

$$A(\Gamma) = \int_\Gamma ds = \int_I \|s'_\varphi \times s'_\theta\| \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(\varphi) \, d\varphi d\theta = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{=2\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin(\varphi) \, d\varphi}_{=2} = 4\pi.$$

Ibland är det bra att kunna formler utantill.

1.2 Uppgift 7

Bestäm minsta värdet av integralen $\int_\Gamma F \cdot n \, ds$ *om*

$$F = \left(x_1 x_2^2 - 4x_1 x_2, \, 4x_2 x_3^2 + 8x_2 x_3 + 5x_2, \, x_1^2 x_3 - 2x_1 x_3\right)$$

och Γ är en sluten yta i $\mathbb{R}^3$ med enhetsnormal n.

Det är givet att Γ är en sluten yta, och eftersom F:s komponenter är polynom, har vi att $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, där $\Omega \in \mathbb{R}^3$ är området Γ sluter som rand. Alltså kan divergenssatsen tillämpas. För att hitta det minsta värdet av den ekvivalenta trippelintegralen

$$\int_\Omega \nabla \cdot F \, dx,$$

bör denna bestämmas över ett Ω där $\nabla \cdot F \leq 0$. Vi söker ett sådant område genom att först beräkna

$$\begin{aligned} \nabla \cdot F &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 x_2^2 - 4x_1 x_2\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(4x_2 x_3^2 + 8x_2 x_3 + 5x_2\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_1^2 x_3 - 2x_1 x_3\right) \\ &= x_2^2 - 4x_2 + 4x_3^2 + 8x_3 + 5 + x_1^2 - 2x_1, \end{aligned}$$

och sedan ta reda på var olikheten gäller. Vi har något som liknar en kvadratisk form och prövar därför med kvadratkomplettering

$$x_2^2 - 4x_2 + 4x_3^2 + 8x_3 + 5 + x_1^2 - 2x_1 \leq 0 \iff (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + 4(x_3 + 1)^2 - 4 \leq 0,$$

vilket är en ellipsoid. Ofta skriver man om den på standardform enligt

$$\frac{1}{4}(x_1 - 1)^2 + \frac{1}{4}(x_2 - 2)^2 + (x_3 + 1)^2 \leq 1,$$

med halvaxlarna $a = 2$, $b = 2$ och $c = 1$ samt centrum i punkten $(1, 2, -1)$. Eftersom $\nabla \cdot F$ annars är positiv räcker det att lösa integralen över detta område. Då passar det bra att gå över till "ellipsoida" koordinater

$$\begin{cases} x_1 = a\, r \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ x_2 = b\, r \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ x_3 = c\, r \cos(\varphi) \end{cases},$$

vilket påminner om hur vi modifierade de polära koordinaterna vid övergång till elliptiska (lägg till halvaxlarna som faktorer). Vi minns att areaskalningen där blev $dx_1 dx_2 = ab\, r dr d\theta$ istället för $dx_1 dx_2 = r dr d\theta$. Man "lade till" produkten av halvaxlarna. Det blir på samma vis här, dvs. att funktionaldeterminanten ges av

$$\det\left(\frac{d(x_1, x_2, x_3)}{d(r, \varphi, \theta)}\right) = abc\, r^2 \sin(\varphi),$$

för ellipsoida koordinater, i jämförelse med sfäriska. Räkningarna blir identiska, så när som på att det tillkommer en faktor abc i varje term i utvecklingen av determinanten (kontrollera om ni vill). Det kan vara bra att lära sig dessa areaskalningar utantill (om inte annat sparar det tid på en tentamen). Hursomhelst får vi

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2\, r \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ x_2 = 2 + 2\, r \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ x_3 = -1 + r \cos(\varphi) \end{cases}, \qquad 0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

i vårt fall ("semi-ellipsoida" koordinater med centrum skilt från origo). Det följer

$$\begin{aligned} \nabla \cdot F &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + 4\,(x_3 + 1)^2 - 4 = 4\left(r^2 - 1\right), \\ dx_1 dx_2 dx_3 &= 4r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi d\theta, \end{aligned}$$

så att

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \cdot F\, dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 4\left(r^2 - 1\right)\, 4r^2\, \sin(\varphi) dr d\varphi d\theta \\ &= 16 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{=2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin(\varphi)\, d\varphi}_{=2} \int_0^1 r^2 \left(r^2 - 1\right)\, dr \\ &= 64\pi \underbrace{\left[\frac{1}{5} r^5 - \frac{1}{3} r^2\right]_0^1}_{=-\frac{2}{15}} = -\frac{128\pi}{15}, \end{aligned}$$

och vi är klara.

1.3 Uppgift 8

Beräkna ytintegralen $\int_\Gamma F \cdot n\, ds$ *där*

$$F(x) = \left(x_2^2,\ x_1 x_2 \cos^2(x_1) + x_1 x_2^3 + e^{\cos(x_1 x_3^2)},\ x_1 x_3 \sin^2(x_1) - 3x_1 x_2^2 x_3\right)$$

och Γ *är delen av sfären* $\|x\| = 2$ *med positiv* x_3*-koordinat, samt* n *normalen med likaså positiv* x_3*-koordinat.*

Vi har en såpass svår integrand, att vi gärna vill använda divergenssatsen, i förhoppningen att derivationen förenklar den. Men Ω är inte slutet — det saknas en botten. Vad man då kan göra är att lägga till den saknade randytan $\overline{\Gamma} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 4\right\}$ (cirkel med radien 2 och centrum i origo) och bestämma

$$\int_\Gamma F \cdot n\, ds = \int_\Omega \nabla \cdot F\, dx - \int_{\overline{\Gamma}} F \cdot n\, ds,$$

där man med sista integralen "drar bort vad man lade till". Man kan fråga sig om det verkligen förenklar uppgiften, eftersom integranden i densamma verkar påminna om den ursprungliga. Att så är fallet ges emellertid av $x_3 = 0$ ($\overline{\Gamma}$ ligger i $x_1 x_2$-planet) samt den utåtpekande enhetsnormalen $n = (0,\, 0,\, -1)$

$$F \cdot n = \left(x_2^2,\ x_1 x_2 \cos^2(x_1) + x_1 x_2^3 + e,\ 0\right) \cdot (0,\, 0,\, -1) = 0.$$

Här gäller med andra ord att

$$\int_\Gamma F \cdot n\, ds = \int_\Omega \nabla \cdot F\, dx$$

trots allt. Vi får nu

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot F &= \frac{\partial}{\partial x_1} x_2^2 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1 x_2 \cos^2(x_1) + x_1 x_2^3 + e^{\cos(x_1 x_3^2)}\right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_1 x_3 \sin^2(x_1) - 3x_1 x_2^2 x_3\right) \\
&= 0 + x_1 \cos^2(x_1) + 3x_1 x_2^2 + x_1 \sin^2(x_1) - 3x_1 x_2^2 \\
&= x_1\left(\cos^2(x_1) + \sin^2(x_1)\right) = x_1,
\end{aligned}$$

och med övergång till sfäriska koordinater (notera gränserna för φ med Ω som det givna halvklotet)

$$\begin{cases} x_1 = r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ x_2 = r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ x_3 = r\cos(\varphi) \end{cases}, \qquad 0 \le r \le 2, \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

ges

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla \cdot F \, dx &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r\sin(\varphi)\cos(\theta) r^2 \sin(\varphi)\, dr d\varphi d\theta \\
&= \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(\theta)\, d\theta}_{=0} \int_0^{\pi/2} \sin^2(\varphi)\, d\varphi \int_0^2 r^3\, dr = 0,
\end{aligned}$$

så att den sökta flödesintegralen är noll. Detta inses egentligen direkt med integranden x_1 p.g.a. symmetrin i halvklotet Ω.

1.4 Uppgift 11

Visa att om $-\Delta u = f$ i Ω, så gäller det för en godtycklig funktion v, som är noll på randen Γ, att

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx.$$

Visa även att om $n \cdot \nabla u = \partial_n u = g$ på Γ, så följer för en godtycklig funktion v att

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma g v \, ds.$$

Båda påståendena är en konsekvens av det som i AMBS kallas *Greens formel* (notera emellertid att i Fredrik Bengzons övningar avses därmed något annat — namnkonventionerna är tyvärr inte alltid överensstämmande)

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Gamma v \partial_n u \, ds - \int_\Omega v \Delta u \, dx,$$

där vi ser likheten med hur vi integrerar partiellt i 1D (den första integralen i HL evalueras på randen med en primitiv funktion till v och den andra med minustecken samt ytterligare en derivata på u). Faktum är att sambandet i sig följer på formeln för partiell integration i flera dimensioner (MD).

Med $-\Delta u = f$ i Ω har vi att

$$-\int_\Omega v \cdot \Delta u \, dx = \int_\Omega v \cdot (-\Delta u) \, dx = \int_\Omega fv \, dx,$$

och om v dessutom är noll på randen

$$\int_\Gamma v\partial_n u \, ds = 0,$$

ges det första påståendet. Om istället $\partial_n u = g$ på Γ måste

$$\int_\Gamma v\partial_n u \, ds = \int_\Gamma gv \, ds,$$

vilket visar det andra. Greens formel tillsammans med formeln för partiell integration i MD är i sin tur — liksom divergenssatsen — på lite olika sätt en följd av det till synes enkla sambandet

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \int_\Gamma u n_i \, ds, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

som sannolikt är bra att lägga på minnet.

2 Kapitel 69

2.1 Uppgift 4

Beräkna integralen

$$\int_\Gamma \frac{(x_1^2 x_2,\, -x_1^3)}{\|x\|^4} \cdot ds,$$

där Γ *är kurvan i* $x_1 x_2$*-planet från* $(1,\,0)$ *till* $(0,\,1)$ *definerad av*

$$(x_1(t),\, x_2(t)) = (\cos^{15}(t),\, \sin^{17}(t)), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Kurvan som det ska integreras längs med är visserligen parametriserad, men uppgiften ser ändå lurig ut, eftersom den resulterande integranden efter insättning blir ”jobbig” (kvot mellan flertalet trigonometriska funktioner). Förenkling är nyckelordet. Man kan, efter lite arbete, använda Stokes sats i 2D (kallas *Greens formel i planet* i Fredrik Bengzons övningar)

$$\int_\Gamma u \cdot ds = \int_\Omega \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) dx,$$

som överför kurvintegralen till en ytintegral (då vi befinner oss i planet blir emellertid ytintegralen en ”vanlig” dubbelintegral). Med lite arbete avses att Γ måste sluta Ω, vilket innebär att vi lägger till ett lämpligt kurvstycke $\overline{\Gamma}$, som sluter området, och sedan beräknar

$$\int_\Gamma u \cdot ds = \int_\Omega \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) dx - \int_{\overline{\Gamma}} u \cdot ds.$$

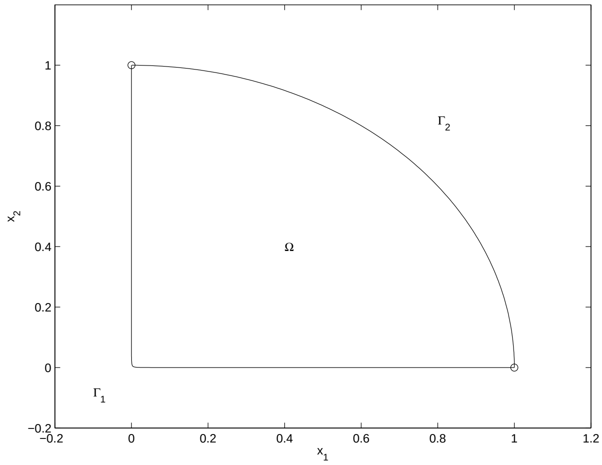
Ett bra kurvstycke är ett kurvstycke som gör integralen lätt att bestämma. Här passar det fint med cirkelbågen $(\cos(t),\, \sin(t))$, $\frac{\pi}{2} \geq t \geq 0$ (kurvan sluter området medurs), eftersom nämnaren i integranden då blir ett. Men vi börjar med att beräkna integralen över Ω

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{x_1^3}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} \right) = -\frac{3x_1^2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} + \frac{4x_1^4}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^3} = \frac{x_1^4 - 3x_1^2 x_2^2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^3}, \\
\frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_1^2 x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} \right) = \frac{x_1^2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} - \frac{4x_1^2 x_2^2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^3} = \frac{x_1^4 - 3x_1^2 x_2^2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^3},
\end{aligned}$$

där det visar sig att $\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0$. Det räcker alltså att lösa kurvintegralen över $\overline{\Gamma}$, vilket görs via definitionen, med $s'(t) = (-\sin(t),\, \cos(t))$, så att

$$\begin{aligned}
-\int_{\overline{\Gamma}} u \cdot ds &= -\int_{\pi/2}^{0} \left(\cos^2(t)\sin(t),\, -\cos^3(t)\right) \cdot (-\sin(t),\, \cos(t))\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(-\cos^2(t)\sin^2(t) - \cos^4(t)\right)\, dt = -\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\, dt \\
&= -\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2t)\right)\, dt = -\frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin(2t) \right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

Eftersom u är ett potentialfält hade vi även kunnat bestämma en potential φ, sådan att $u = \nabla\varphi$, och fått samma svar via $\varphi(0,\,1) - \varphi(1,\,0)$. Fast det blir förmodligen lite jobbigt att beräkna φ. Oavsett vilket blir kurvintegralen oberoende av vägen.



Figur 1: Området Ω med ränder $\Gamma = \Gamma_1$, $\overline{\Gamma} = \Gamma_2$

2.2 Uppgift 8

Låt Ω vara en domän i $\mathbb{R}^2$ med rand Γ. Visa att arean ges av

$$A(\Omega) = \frac{1}{2}\int_\Gamma u \cdot ds,$$

där $u(x) = (-x_2,\, x_1)$ samt Γ orienterad moturs. Använd resultatet för att visa att arean som begränsas av ellipsen $x = (a\cos(t),\, b\sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, är πab.

Vi har arean av Ω som

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= \int_\Omega dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2}\right)}_{=2} dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1} - \frac{\partial(-x_2)}{\partial x_2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\nabla \times \underbrace{(-x_2,\, x_1)}_{=u}\right) \cdot \underbrace{(0,\, 0,\, 1)}_{=n} dx = \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla \times u)\cdot n\, dx, \end{aligned}$$

med enhetsnormalen n (”högerregeln” säger att med fingrarna i kurvans bana pekar tummen i normalens riktning). Eftersom vi befinner oss i x_1x_2-planet, kan Stokes sats tillämpas med ytintegralen som en dubbelintegral, och det följer

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla \times u)\cdot n\, dx = \frac{1}{2}\int_\Gamma u \cdot ds,$$

vilket visar påståendet.

Med den givna parametriseringen fås $u = (-x_2,\, x_1) = (-b\,\sin(t),\, a\,\cos(t))$ samt $ds =$

$s'(t)\,dt = (-a\,\sin(t),\, b\,\cos(t))\,dt$, och ellipsens area måste vara

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Gamma u\cdot ds &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} u(s(t))\cdot s'(t)\;dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(ab\,\sin^2(t)+ab\,\cos^2(t)\big)\;dt\\ &= \frac{1}{2}\,ab\int_0^{2\pi} dt = \pi ab,\end{aligned}$$

enligt den nyss härledda formeln.

3 Kapitel 70

3.1 Uppgift 1

Bestäm om möjligt en potential φ till följande funktioner.

u är ett potentialfält om $\nabla \times u = 0$. I förekommande fall bestäms potentialen genom sambandet $u = \nabla\varphi$. En tillämpning av potentialer dyker upp vid lösning av kurvintegraler

$$\int_\Gamma u \cdot ds = \int_\alpha^\beta u(s(t)) \cdot s'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta \nabla\varphi(s(t)) \cdot s'(t)\, dt,$$

där $t \in [\alpha, \beta]$. Men eftersom $s(t) = (x_1(t), x_2(t)) \implies s'(t) = (x_1'(t), x_2'(t))$ fås genom kedjeregeln att

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta \nabla\varphi(s(t)) \cdot s'(t)\, dt &= \int_\alpha^\beta \nabla\varphi\,(x_1(t), x_2(t)) \cdot \left(x_1'(t), x_2'(t)\right)\, dt \\ &= \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t}\right) dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}\varphi(s(t))\, dt, \end{aligned}$$

varpå fundamentalsatsen säger att

$$\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}\varphi(s(t))\, dt = \varphi(s(\beta)) - \varphi(s(\alpha)) = \varphi(b) - \varphi(a),$$

med a, b som start- respektive slutpunkt på kurvan (skilj dem med andra ord från α, β som är motsvarande punkter för parameterintervallet). Detta innebär särskilt att kurvintegralen blir oberoende av vägen.

(a) $u(x) = (x_1,\, x_2,\, x_3)$

Rotationen bestäms till

$$\begin{aligned} \nabla \times u &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \\ &= (1,\, 0,\, 0)\,(0-0) - (0,\, 1,\, 0)\,(0-0) + (0,\, 0,\, 1)\,(0-0) = 0, \end{aligned}$$

och fältet är tydligen rotationsfritt. Återstår att beräkna potentialen via upprepad integration

$$u = \nabla\varphi \iff \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = x_1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = x_2 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = x_3 \end{cases},$$

där den tredje ekvationen ger

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\, dx_3 = \int x_3\, dx_3 \implies \varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_3^2 + f(x_1, x_2).$$

Insatt i den andra ges "konstanten" — $f(x_1, x_2)$ är konstant med avseende på x_3 — till att vara

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{2}x_3^2 + f(x_1, x_2)\right) = f'_{x_2}(x_1, x_2) = x_2 \implies f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + g(x_1),$$

så att $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}\left(x_2^2 + x_3^2\right) + g(x_1)$. På samma sätt ger en avslutande insättning i den första ekvationen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2}\left(x_2^2 + x_3^2\right) + g(x_1)\right) = g'(x_1) = x_1 \implies g(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 + C,$$

med C som en konstant. Vi har alltså bestämt potentialer $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + C$, som i det här enkla fallet egentligen kunde ha bestämts direkt via inspektion. Alla gånger är det dock inte lika lätt.

(b) $u(x) = (x_3,\, x_1,\, x_2)$

Rotationen bestäms till

$$\begin{aligned}
\nabla \times u &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_3 & x_2 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ x_3 & x_1 \end{vmatrix} \\
&= (1,\, 0,\, 0)\,(1 - 0) - (0,\, 1,\, 0)\,(0 - 1) + (0,\, 0,\, 1)\,(1 - 0) = (1,\, 1,\, 1),
\end{aligned}$$

så att fältet inte är rotationsfritt. Här saknar u potentialer.